Т.А. АЛДАМУРАТОВА, К.С. БАЙШОЛАНОВА,
Е.С. БАЙШОЛАНОВ

МАТЕМАТИКА

В двух частях

Часть 2

Учебник для 6 класса общеобразовательной школы

6

Рекомендовано Министерством образования и науки
Республики Казахстан

Алматы «Атамұра» 2018

1–3451

УДК 373.167.1
ББК 22. 1 я 72
А 45

Учебник подготовлен в соответствии с Типовой учебной программой по предмету «Математика» для 5–6 классов уровня основного среднего образования по обновленному содержанию, утвержденной Министерством образования и науки РК.

Под редакцией доктора физико-математических наук,
профессора
Мухамбетжанова Салтанбека

Рецензенты: **Симакина Галина Николаевна** –
отличник народного образования КазССР,
учитель высшей категории школы
для одаренных детей «Зерде» г. Астаны;
Оноприенко Любовь Николаевна –
учитель математики высшей категории школы-лицея № 27 г. Астаны.

Алдамуратова Т.А. и др.
А 45 **Математика.** Учебник для 6 класса общеобразоват. шк. в 2 частях / Т.А. Алдамуратова, К.С. Байшоланова, Е.С. Байшоланов. – Алматы: Атамұра, 2018. – 224 с.

ISBN 978-601-331-130-2
Ч. 2 – 2018. – 224 с.
ISBN 978-601-331-131-9

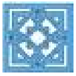
УДК 373.167.1
ББК 22. 1 я 72

ISBN 978-601-331-131-9 – (ч. II)
ISBN 978-601-331-130-2

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

 – задания для предварительной подготовки к усвоению новой темы;

 – вопросы по основному материалу темы;

 – исторические сведения;

A – упражнения первого уровня;

B – упражнения второго уровня;

C – упражнения третьего уровня;

синий цвет – упражнения для повторения;

* – задачи повышенной трудности;

в рамке – упражнения логического характера;

○ – задачи на смекалку;

▲ – задачи с одним условием и различными вопросами;

● – наводящие вопросы;

✸ – задачи с использованием информационно-коммуникационных технологий – ИКТ;

▲ – ответы к упражнениям по данной теме;

$\boxed{?}$ – задания для самостоятельного усвоения новой темы;

‖ – так отмечены ожидаемые ответы учащихся на поставленные вопросы, а также выводы.

1. Выберите верные числовые равенства:

1) $2 \cdot (-5) = -10$; 3) $(9 + 6) : 3 = 8$;

2) $(17 - 9) \cdot 2 = 25$; 4) $(7 + 8) \cdot 2 = 14 + 16$.

2. Какое число нужно вставить вместо звездочки, чтобы получилось верное числовое равенство:

1) $2 \cdot 3 + (*) = 6 + 5$;

2) $18 + (-*) = 9 \cdot 2 + (-3)$;

3) $(7 + 6) \cdot (-2) = 13 \cdot (-*)$;

4) $(5 - 8) \cdot (*) = -3 \cdot 9$;

5) $$+\begin{array}{c} 6 \cdot 2 = 12 \\ 3 \cdot 5 = 15 \\ \hline 6 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = (*) + 15 \end{array};$$

6) $$+\begin{array}{c} 21 : 7 = 3 \\ 8 \cdot 4 = 32 \\ \hline 21 : 7 + 8 \cdot 4 = 3 + (*) \end{array}\ ?$$

Глава IV. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1. Числовые равенства. Свойства верных числовых равенств

Понятие числового равенства известно из курса математики 5 класса, напомним его.

Запись, в которой знаком равенства «=» соединены два равных числовых выражения, называют числовым равенством.

Примеры числовых равенств:

$$25 = 25; \qquad 9 \cdot (-5) + 2 = -43; \qquad 36 : (-2) + 7 = -11.$$

Рассмотрим свойства верных числовых равенств:

1. $\boxed{\text{Если } a = b \text{ и } b = c, \text{ то } a = c.}$

Пример 1. $9 \cdot 4 = 36$ и $36 = 18 \cdot 2$, то $9 \cdot 4 = 18 \cdot 2$.

2. Если к обеим частям верного числового равенства прибавить одно и то же число, то получится верное числовое равенство.

$\boxed{\text{Если } a = b, \text{ то } a + c = b + c,}$

где c – любое рациональное число.

Пример 2. 1) $8{,}4 + 3{,}6 = 12$;

$8{,}4 + 3{,}6 + (-3{,}6) = 12 + (-3{,}6)$;

$8{,}4 = 12 - 3{,}6$

$8{,}4 = 8{,}4$.

2) $24 : 3 - 6 = 2$;

$24 : 3 - 6 + 6 = 2 + 6$;

$24 : 3 = 2 + 6$

$8 = 8$.

Значит, *любое слагаемое можно перенести из одной части верного числового равенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный.*

3. **Если обе части верного числового равенства умножить или разделить на одно и то же, отличное от нуля число, то получится верное числовое равенство.**

Если $a = b$, $c \neq 0$, то $ac = bc$; $a : c = b : c$.

Пример 3. 1) $3 - 11 = -8$;
$(3 - 11) \cdot 2 = (-8) \cdot 2$;
$-16 = -16$.

2) $3 - 11 = -8$;
$(3 - 11) : 4 = (-8) : 4$;
$-2 = -2$.

4. **Если почленно сложить два верных числовых равенства, то получится верное числовое равенство.**

Если $a = b$ и $c = d$, то $a + c = b + d$.

Пример 4.

$$\begin{array}{l} + \begin{array}{l} 42 : (-6) = -7 \\ 12 \cdot 5 = 60 \end{array} \\ \hline 42 : (-6) + 12 \cdot 5 = (-7) + 60, \\ \qquad\qquad 53 = 53. \end{array}$$

5. **Если почленно умножить два верных числовых равенства, то также получится верное числовое равенство.**

Если $a = b$ и $c = d$, то $ac = bd$.

Пример 5.

$$\begin{array}{l} \times \begin{array}{l} 5 + 3 = 8 \\ 9 - 2 = 7 \end{array} \\ \hline (5 + 3) \cdot (9 - 2) = 8 \cdot 7, \\ 56 = 56. \end{array}$$

1. Что такое числовое равенство? Приведите примеры.
2. Какое свойство необходимо соблюдать при переносе слагаемого из части числового равенства в другую его часть?
3. Как сложить два верных числовых равенства?
4. Как умножить два верных числовых равенства?

763. По рисункам (рис. 4.1) определите, как и на сколько изменится расстояние между двумя объектами за 30 мин (устно).

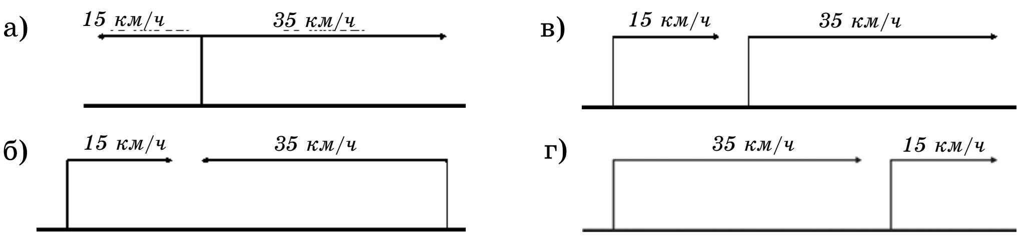


Рис. 4.1

A

764. Выберите верное числовое равенство:

1) $6 + 3 = 1,8 \cdot 5$;
2) $2,8 - 9 = 3,4 \cdot 2$;
3) $0,9 \cdot 6 + 2 = 10 - 2,6$;
4) $\frac{2}{3} \cdot 6 - 1 = 4 + 1$;
5) $\frac{1}{8} \cdot 8 + 7 = 2,4 : 0,3$;
6) $1,6 + 4 = 0,8 \cdot 2 + 4$.

765. Запишите верное числовое равенство, которое получится, если к обеим частям данного равенства:
1) $7,2 + 1,8 = 9$;
2) $1,4 \cdot 5 = 7$;
3) $6 - 1,3 = 4,7$;
4) $9 : 1,8 = 5$

прибавить: а) $1,3$; б) $-1,8$; в) -11.

766. Выполните почленное сложение верных числовых равенств:
1) $7 : 1,4 = 5$ и $0,6 \cdot 3 = 1,8$;
2) $(-9) : 1,5 = -6$ и $4 = 3,2 : 0,8$;
3) $0,8 \cdot (-7) = -5,6$ и $1,2 \cdot 5 = 6$;
4) $3,2 \cdot 5 = 16$ и $9 : 6 = 1,5$.

767. Запишите верное числовое равенство, которое получится, если обе части равенства:
1) $1,2 \cdot (-7) = -8,4$

умножить: а) на -5; б) на 3; в) на $0,5$;

2) $5,4 \cdot 2 = 10,8$

разделить: а) на -3; б) на 9; в) на 6.

768. Из двух верных числовых равенств составьте одно верное числовое равенство:
1) $24 : 6 = 28 : 7$ и $28 : 7 = 60 : 15$;
2) $9,5 : 1,9 = 2,4 : 0,48$ и $2,4 : 0,48 = 8,5 : 1,7$;
3) $18,4 : 2,3 = 5,6 : 0,7$ и $5,6 : 0,7 = 11,2 : 1,4$.

B

769. Расставьте скобки так, чтобы выполнялось условие верного числового равенства:
1) $2 - 8 \cdot 0,5 = 48 : (-16)$;
2) $72 : 9 + 3 = 3,2 + 2,8$;
3) $9,6 : 1,2 = 5 \cdot 0,7 + 0,9$;
4) $9 \cdot 2 - 8 = 20 \cdot (-2,7)$.

770. Выполните почленное сложение верных числовых равенств:
1) $0,6 - 2 = -1,4$ и $2 + 1,8 = 3,8$;
2) $1,7 + 6 = 7,7$ и $0,5 - 1,7 = 0,4 \cdot (-3)$;
3) $1,8 \cdot (-5) = (-2) \cdot 4,5$ и $(-5) \cdot 1,2 = (-2) \cdot 3$;

4) $\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=-0,15$ и $\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-0,6.$

771. Выполните почленное умножение верных числовых равенств:
1) $3,8-5=-1,2$ и $3=0,6+2,4$;
2) $-2+1,7=-0,3$ и $4=1,4+2,6$;
3) $2:0,4=5$ и $18=9:0,5$;
4) $1,8\cdot 5=9$ и $1,3+2,5=3,8$.

772. Длина отрезка, изображающего расстояние на карте от Семипалатинска до Усть-Каменогорска, равна 2,8 см. Масштаб карты 1 : 7 500 000. Найдите длину отрезка между этими городами на карте, составленной в масштабе 1 : 1 500 000.

C

773. Используя свойство верных числовых равенств: $a=b$ и $b=c$, то $a=c$, из данных выражений составьте всевозможные верные числовые равенства:

1) $3^2\cdot 8$;	$14,4:0,2$;	$100-28$;
2) $15\cdot 1,4$;	2^3+13;	$8,4:0,4$;
3) $2,5\cdot 12$;	$4,5:0,15$;	$8\cdot 3+6$.

774. Выполните почленное сложение верных числовых равенств:
1) $13+(-3^3)=7\cdot(-2)$ и $2^3-13=6:(-1,2)$;
2) $(-7)^2-30=4^2+3$ и $51-10^2=(-4)^3+15$;
3) $(-2)^5+(-4)^2=80:(-5)$ и $84:(-7)=(-5)^2-37$.

775. Как набрать 2 литра воды из реки, пользуясь сосудами емкостью 9 л и 5 л?

776. Выполните почленное умножение верных числовых равенств:

1) $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$ и $8=1,6\cdot 5$;
3) $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$ и $12=\frac{4}{5}\cdot 15$;
2) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$ и $6=2,4+3,6$;
4) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ и $6=1,2\cdot 5$.

777*. Отношение двух чисел равно 5 : 7. Если из первого числа вычесть 36, то отношение данных чисел станет равным 2 : 7. Найдите эти числа.

778. Вычислите:

$$\frac{\left(\frac{7}{15}-\frac{3}{40}-\frac{1}{24}\right):0,7}{\left(2,4\cdot\frac{1}{3}-3\right)\cdot\frac{5}{11}}\cdot\frac{1\frac{5}{6}:\left(\frac{3}{4}-1\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{4}{9}-\frac{5}{12}+0,75\right)\cdot\frac{3}{7}}.$$

Ключевые факты

Числовые равенства. Свойства верных числовых равенств.

Числовое равенство – это запись, в которой знаком равенства «=» соединены два равных числовых выражения.

Например, $\underbrace{9 + (-21) \cdot 3 = 2 \cdot (-27)}_{\text{Числовое равенство}}$.

Буквенная запись свойств верных числовых равенств, где a, b, c – любое рациональное число	Пример
1. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.	$6 \cdot 2 = 12$; $12 = 3 \cdot 4$, то $6 \cdot 2 = 3 \cdot 4$.
2. Если $a = b$, то $a + c = b + c$.	$6 \cdot 2 + 5 = 12 + 5$.
$a - c = b - c$.	$6 \cdot 2 - 7 = 12 - 7$.
3. Если $a = b$, $c \neq 0$, то: $ac = bc$.	$10 + 8 = 9 \cdot 2$.
$a : c = b : c$.	$(10 + 8) \cdot 3 = 9 \cdot 2 \cdot 3$.
	$(10 + 8) : 3 = 9 \cdot 2 : 3$.

▲ **770.** 1) 2,4 = 2,4; 2) 6,5 = 6,5; 3) −15 = −15; 4) −0,75 = −0,75. **771.** 1) −3,6 = −3,6; 2) −1,2 = −1,2; 3) 90 = 90. **772.** 14 см. **774.** 1) −19 = −19; 2) −30 = −30. **776.** 1) 3 = 3; 2) 1 = 1; 3) 5 = 5; 4) 5 = 5. **778.** 3.

Научитесь!

№1. Найдем корень уравнения $9x = x + 12$. Прибавим к обеим частям уравнения выражение $(-x)$.

$9x - x = x - x + 12$,

$8x = 12$,

$x = 12 : 8$,

$x = 1,5$.

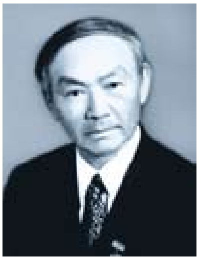
№2. Найдем корень уравнения $8x - 7 = 2x + 5$.

$8x - 7 + 7 = 2x + 5 + 7$,

$8x = 2x + 12$,
$8x - 2x = 2x - 2x + 12$,
$6x = 12$,
$x = 2$.
Решите уравнения предложенным способом:

1) $5x-8=2x+1$; 2) $2\frac{5}{6}x - 5,5 = 1\frac{2}{3}x - 2$.

4.2. Линейное уравнение с одной переменной. Равносильные уравнения. Решение линейных уравнений с одной переменной



Жаутыков Орынбек Ахметбекович
(1911–1989)

Ученый-математик. Внес значительный вклад в развитие математической науки. Академик Национальной академии наук Республики Казахстан. Доктор физико-математических наук, профессор. Основные научные труды посвящены математическим уравнениям, теоретической и прикладной механике.

I. Линейное уравнение с одной переменной.

Уравнения вида $5x - 7 = x + 1$; $2x + 5 = 3x - 8$; $3x + 0,8 = 4x - 1,2$ называются линейными уравнениями с одной переменной. Такие уравнения после преобразования и упрощения приводятся к виду $ax + b = 0$, где a – коэффициент при переменной, b – свободный член.

Уравнения вида $ax + b = 0$, где x – переменная, a и b – некоторые числа, называют *линейными уравнениями с одной переменной*.

Например: $0,9x - 4,5 = 0$; $2x + 5 = 3x - 2$ – линейные уравнения с одной переменной.

Нам надо найти число, при подстановке которого вместо x в уравнение получается верное числовое равенство. Такое число называется *корнем уравнения*.

***Корнем уравнения* называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.**

Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

II. Равносильные уравнения.

Уравнения равносильны, если они имеют одни и те же корни или не имеют корней.

Например, уравнение $4(x - 3) = 0$ и уравнение $4x - 12 = 0$ равносильны, так как они имеют один и тот же корень, равный 3.

Обычно при решении уравнений стараются заменить данное уравнение более простым, но равносильным ему. Такое преобразование называют *равносильным преобразованием*.

Правила равносильных преобразований уравнений

1. **Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть одно и то же число (выражение), то получится уравнение, равносильное данному.**

Например, $6x + 7 = 25,$
$6x + 7 - 7 = 25 - 7,$
$6x = 25 - 7.$

Уравнение $6x + 7= 25$ равносильно уравнению $6x = 25 - 7$.

Следствие.

Если в уравнении какое-нибудь слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному.

2. **Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же, отличное от нуля, число, то получится уравнение, равносильное данному.**

Например, $\frac{x}{2} - 1 = \frac{x}{3}$

$$\left(\frac{x}{2} - 1\right) \cdot 6 = \frac{x}{3} \cdot 6,$$

$3x - 6 = 2x.$

Уравнение $\frac{x}{2} - 1 = \frac{x}{3}$ равносильно уравнению $3x - 6 = 2x$.

При умножении обеих частей уравнения на 0 равносильность может нарушиться.

Например, уравнение $x = 6$ имеет один корень – число 6, а корнем уравнения $x \cdot 0 = 6 \cdot 0$ является любое число. Уравнения $x = 6$ и $x \cdot 0 = 6 \cdot 0$ – не равносильны. Поэтому умножение обеих частей уравнения на 0, наряду с делением на 0, также следует исключить.

III. Решение линейных уравнений с одной переменной.

При решении уравнения $ax + b = 0$, или уравнения $ax = -b$, имеют место три случая.

I. Если $a \neq 0$, b – любое число, то, разделив на a обе части уравнения $ax = -b$ получим $x = -\frac{b}{a}$. В этом случае уравнение имеет единственный корень, равный $-\frac{b}{a}$.

?

Пример 1. Решите уравнение $8x - 9 = 3x + 8$.

Подсказка.

1. Перенесем слагаемые, содержащие x (неизвестную), в левую часть, а свободные члены – в правую.
2. Приведем подобные слагаемые.
3. Разделим обе части уравнения на коэффициент при переменной x и получим корень уравнения.

Проверьте себя.

Решение:

$8x - 9 = 3x + 8$,

1. $8x - 3x = 8 + 9$,
2. $5x = 17$,
3. $x = 17 : 5$,

$x = 3{,}4$.

Ответ: 3,4.

II. Если $a = 0$; $b \neq 0$, то уравнение $ax + b = 0$ имеет вид $0x + b = 0$, значит $0x = -b$. В этом случае уравнение не имеет корней, так как равенство $0x = -b$ ни при каком x не является верным.

Пример 2. $7x + 3 = 7x + 5$,

$7x - 7x = 5 - 3$,

$0 \cdot x = 2$.

Уравнение не имеет корней. Множество корней уравнения – пустое множество.

Ответ: $\varnothing$.

III. Если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение $ax + b = 0$ принимает вид $0x + 0 = 0$. При умножении любого числа на нуль получится нуль. Поэтому вместо x можно подставить любое число и получить верное равенство. Отсюда корень уравнения $0x = 0$ – любое число. Уравнение имеет бесконечное множество корней.

Пример 3. $2x + x - 5 = 3x - 5$,

$3x - 3x = 5 - 5$,

$0x = 0$.

Ответ: x – любое число.

Итак, множество корней линейного уравнения $ax + b = 0$ может состоять из одного элемента, быть пустым множеством или бесконечным множеством.

Задача. Два прямоугольника имеют одинаковую ширину. Длина первого прямоугольника 20 см, длина второго – 24 см. Площадь первого прямоугольника на 48 см^2 меньше, чем площадь второго. Найдите ширину прямоугольников.

Решение. Пусть x см – ширина прямоугольников.

По условию задачи: $20x + 48 = 24x$;

$20x - 24x = -48$;

$-4x = -48$;

$x = 12$.

Ответ: 12 см.

Проверка: $20 \cdot 12 + 48 = 24 \cdot 12$; $240 + 48 = 24 \cdot 12$; $288 = 288$.

1. Какое уравнение называется линейным уравнением с одной переменной?
2. Какие уравнения называют равносильными уравнениями?
3. Как находят корни линейного уравнения с одной переменной при $a \neq 0$?

779. Решите уравнения (устно):

1) $x + 2{,}7 = 3$; 3) $\frac{3}{4} + x = 1$; 5) $2x - 5 = x - 1$;

2) $x - 0{,}6 = 1{,}4$; 4) $x - 1\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$; 6) $2{,}7x + 1{,}3 = x + 3$.

A

Решите уравнения (**780–783**).

780. 1) $2x + 17 = 22 + 3x$; 4) $13x + 27 = 16x + 4{,}5$;
2) $18 + 3x = x + 14$; 5) $21x + 45 = 17 + 14x$;
3) $25 - 4x = 12 - 5x$; 6) $13x + 70 = 2x + 15$.

781. 1) $3{,}4x - 4 = 4{,}8 - x$; 4) $9{,}5x + 2 = 5{,}7x - 5{,}6$;
2) $2x + 7 = x + 5{,}5$; 5) $1{,}5x + 8 = 3{,}1x + 16$;
3) $5 - 3x = 2x - 8$; 6) $2{,}9x + 7{,}4 = x + 1{,}7$.

782. 1) $x = \frac{2}{3}x + 1$; 3) $x - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}x$; 5) $\frac{2}{3}y - \frac{1}{3} = \frac{5}{9}y$;

2) $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x$; 4) $1\frac{4}{5}y = y + 4$; 6) $\frac{3}{4}y - \frac{2}{3} = \frac{7}{12}y$.

783. 1) $7x - (3 + 2x) = x + 9$; 3) $3x - (10 - 9x) = 22x$;
2) $13 - (2x - 5) = x - 3$; 4) $26 - (17 - 2x) = 5x$.

Решите задачу, составив уравнение **(784–792)**.

784. Сумма двух чисел равна 21. Удвоенное первое число на 3 больше, чем второе. Найдите первое число.

785. В первом бассейне было 1600 м^3 воды, а во втором – 1215 м^3. Чтобы вычистить первый бассейн, из него насосом выкачивают 65 м^3 воды в час. Чтобы наполнить второй бассейн, в него насосом заливают 45 м^3 воды в час. Через сколько часов объемы воды в бассейнах станут равными, если оба насоса будут работать одновременно?

786. В $6^{А}$ классе учеников на 25% больше, чем в $6^{Б}$ классе. Когда трех учеников из $6^{А}$ класса перевели в $6^{Б}$ класс, то количество учеников в обоих классах стало равным. Сколько учеников было в каждом классе первоначально?

787. От станции A в противоположных направлениях движутся два поезда. Первый поезд находится на расстоянии 70,5 км, а второй – на расстоянии 56,75 км от станции A. Через сколько часов оба поезда будут находиться на одинаковом расстоянии от станции A, если первый поезд идет со скоростью 57 км/ч, а второй – 62,5 км/ч?

A. 2.3 ч; **B.** 2,5 ч; **C.** 2,8 ч; **D.** 2,1 ч.

788. Нужно разлить виноградный сок в банки емкостью 2 л или 3 л. Если разлить сок в банки емкостью 2 л, то понадобится на 2 банки больше, чем банок емкостью 3 л. Сколько литров виноградного сока нужно разлить?

789. Вдоль двух улиц посадили деревья для озеленения. Количество деревьев на первой улице в 1,4 раза больше, чем на второй. Когда с первой улицы пересадили 13 деревьев на вторую, то количество деревьев на обеих улицах стало равным. Сколько деревьев было посажено на каждой улице первоначально?

790. Сейчас отцу 34 года, а сыну 11 лет. Через сколько лет возраст отца будет в 2 раза больше возраста сына?

791. Чтобы выполнить задание в срок, рабочие ежедневно должны были ремонтировать по 6 моторов. Ремонтируя в день на 2 мотора больше, рабочие выполнили задание на 3 дня раньше срока. Сколько всего моторов должны были отремонтировать рабочие?

792. Расстояние от пристани A до пристани B катер проплыл по течению реки за 6 ч, а от пристани B до пристани A – за 7,5 ч. Скорость течения реки 2 км/ч. Найдите собственную скорость катера.

B

793. Решите уравнения:

1) $4x + 5(3 - 2x) = 5 - 11x$;
3) $8x + 3(7 - 2x) = 4x + 3$;
2) $19 - 2(3x + 8) = 2x - 37$;
4) $23 - 4(3x + 8) = 1 - 17x$.

794. Найдите корень уравнений:

1) $\dfrac{x-5}{4} = 7 - \dfrac{2x-11}{3}$;
2) $5 + \dfrac{7x-12}{3} = x + 13$;

3) $\frac{2-7y}{6}+\frac{4y+7}{3}=-\frac{y}{2}$; 4) $\frac{7y-1}{12}-\frac{y+1}{4}=\frac{2y+5}{3}$.

795. В один ряд запишите уравнения, не имеющие корней, в другой – уравнения, имеющие бесконечное множество корней:

1) $13+28x=5x+17+23x$; 3) $\frac{3}{4}y+2y+5=2\frac{3}{4}y+4{,}1+0{,}9$;

2) $5-3x+4=17x+9-20x$; 4) $9-16y=20-31y+15y$.

Решите задачу, составив уравнение **(796–804).**

796. В первом ряду кустов смородины в 2,5 раза больше, чем во втором. Если с первого ряда пересадить 12 кустов на второй, то количество кустов смородины в каждом ряду станет одинаковым. Сколько кустов смородины было во втором ряду первоначально?

797. Количество книг на двух полках было одинаковым. Когда с первой полки переложили 18 книг на вторую, то на второй полке книг стало в 3 раза больше, чем на первой. Сколько книг было на каждой полке первоначально?

798. Сумма двух чисел равна 348. Второе число на 6 больше, чем 80% первого числа. Найдите первое число.

799. В магазин завезли 11 пакетов с орехами массой по 1,5 кг и 1,8 кг. Масса орехов в пакетах по 1,5 кг равна массе орехов в пакетах по 1,8 кг. Сколько пакетов с орехами по 1,5 кг завезли в магазин?

800. Площадь двух полей, засеянных пшеницей, равна 100 га. Урожайность первого поля составила 12 ц с гектара, а урожайность второго – 10 ц с гектара. Со второго поля собрали урожая на 18,8 т меньше, чем с первого. Какова площадь первого поля?

A. 45 га; **B.** 46,3 га; **C.** 54 га; **D.** 50,7 га.

801. Из двух сплавов, содержащих серебро, получили третий. Масса первого сплава 50 г, в нем 60% чистого серебра, во втором сплаве 80% чистого серебра. Третий сплав содержит 64% чистого серебра. Какова масса второго сплава?

802. Сумма трехзначного и двузначного чисел равна 269. Если у первого числа убрать последнюю цифру 5, то получится второе число. Найдите первое слагаемое.

803. От станции A до станции B поезд идет 7,8 ч. Если скорость поезда будет на 10 км/ч меньше, то для преодоления этого пути он затратит времени на 1 ч 30 мин больше. Найдите расстояние между станциями A и B.

804. Два брата одновременно вышли из дома и направились в школу. Старший брат шел со скоростью 80 м/мин. Младший брат шел со скоростью на 30 м/мин меньшей, чем скорость старшего брата, поэтому он пришел в школу на 6 мин позже. За сколько минут дошел до школы старший брат?

805. Найдите способом подбора корень уравнения:

1) $x(x + 5) = 104$; 2) $x - \frac{5}{x} = (x - 1) + \frac{4}{x}$; 3) $\frac{x - 2}{x} = \frac{1}{2}$.

806. Из 18 палочек с одинаковой длиной по 4 см сложили прямоугольник наибольшей площади. Найдите площадь этого прямоугольника.

C

807. Дано уравнение $8x - 7 = 3x + n$. Найдите n, если корнем уравнения является число:

1) -2; 2) $-0{,}2$; 3) $0{,}4$; 4) 3.

808. При каком значении a уравнение:

1) $2ax = 5$ не имеет корней;
2) $(3 + a)x = 1 + 4a$ имеет корень, равный числу 2;
3) $(4 + 3a)x = 16 + 5a$ имеет корень, равный числу (-3)?

809. Выберите равносильные уравнения:

1) $|y + 2| = 7$ и $(y - 5)(y + 9) = 0$;
2) $|2y + 5| = 3$ и $(y + 1)(y + 4) = 0$;
3) $|5x - 11| = 4$ и $(x - 8)(x - 3) = 0$;
4) $|8 - x| = 2$ и $(x - 6)(x - 10) = 0$.

810. Решите уравнения:

1) $\frac{4 - 7x}{15} + \frac{1 - x}{3} = 4 - \frac{2x + 1}{5}$; 2) $\frac{10 - y}{6} + \frac{3y + 8}{3} = \frac{y + 6}{2}$;

3) $\dfrac{3x+5}{5}+\dfrac{9x-5}{4}=6+\dfrac{3x+1}{2}$; 4) $\dfrac{5-9x}{8}-\dfrac{3+5x}{4}=\dfrac{5-3x}{2}$.

811. Решите уравнения:

1) $\dfrac{7(x-6)}{4}=\dfrac{5(x+1)}{3}-3(x+2)$;

2) $\dfrac{3(x-8)}{5}+\dfrac{7(x+5)}{6}=\dfrac{4(7x+1,5)}{15}+\dfrac{1}{3}$;

3) $\dfrac{3(2x+5)}{8}-\dfrac{2(5x+7)}{3}=\dfrac{7(x-15)}{4}-6\dfrac{7}{8}$.

Решите задачу, составив уравнение **(812–818).**

812. От населенного пункта до ближайшей станции туристы едут на автобусе. Если автобус будет ехать со скоростью 60 км/ч, то они прибудут на станцию на 20 мин раньше. Если автобус будет ехать со скоростью 50 км/ч, то прибудут на 12 мин позже. Каково расстояние от населенного пункта до ближайшей станции?
A. 140 км; **B.** 170 км; **C.** 160 км; **D.** 165 км.

813. Оператор набрал текст за три дня. В первый день он набрал 40% всего текста, во второй день – 21 страницу. В третий день ему осталось набрать 25% текста. Сколько страниц содержит текст?

814. Расстояние от пункта *A* до пункта *B* теплоход проплыл против течения реки за 1 ч 48 мин. На обратный путь из пункта *B* до пункта *A* он затратил на 18 мин меньше. Скорость течения реки 2,4 км/ч. Найдите собственную скорость теплохода.

815. Даны прямоугольник и квадрат. Длина прямоугольника 12 см. Сторона квадрата на 1 см меньше, чем ширина прямоугольника. Периметр квадрата на 10 см меньше, чем периметр прямоугольника. Найдите ширину прямоугольника.

816. Аул расположен между станцией и дачным поселком на расстоянии 4 км от станции. Из аула в сторону дачного поселка вышел пешеход со скоростью 75 м/мин. Через 0,5 ч со станции в том же направлении выехал велосипедист со скоростью 200 м/мин. Через сколько минут велосипедист догонит пешехода?

817. Из числа участников кружка домбристов лишь $\dfrac{3}{5}$ умели играть на домбре. Через неделю еще 6 участников научились играть на этом инструменте. После этого количество не умеющих играть на домбре составило 10% всех участников кружка. Сколько человек посещают кружок домбристов?

A. 20 человек; **B.** 24 человека; **C.** 25 человек; **D.** 18 человек.

818. Старинная задача. Говорит дед внукам: «Вот вам 130 орехов. Разделите их на две части так, чтобы меньшая часть, увеличенная в 4 раза, равнялась бы большой части, уменьшенной в 3 раза. Как разделить орехи?»

819*. Решите уравнения:

1) $2=\cfrac{5}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+x}}}$; 2) $1=\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{3-\cfrac{2}{3+x}}}$; 3) $5=\cfrac{2}{1-\cfrac{3}{1+\cfrac{2}{1-\cfrac{1}{1+x}}}}$.

820. Составьте уравнение по условию задачи.

Используя источники информационного-коммуникационных технологий (ИКТ), запишите значение нормального атмосферного давления в миллиметрах ртутного столба (мм рт. ст.).

При подъеме из нижнего слоя атмосферы на каждые 10 м высоты атмосферное давление изменяется на –1 мм рт. ст. На вершине пика Талгар атмосферное давление равно 262,7 мм рт. ст.

На какой высоте было измерено атмосферное давление, если у подножия горы оно было нормальным?

Ключевые факты.

Линейное уравнение с одной переменной. Равносильные уравнения.

Линейным уравнением с одной переменной x называют уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b – некоторые числа. Число a называют коэффициентом при переменной x, b – свободным членом.

Пример 1. 1) $0{,}4x - 2{,}8 = 0$; 2) $3(x + 1) = x - 1$ – линейные уравнения с одной переменной.

Уравнения, имеющие одни и те же корни, называют *равносильными*. Уравнения, не имеющие корней, также считают *равносильными*.

Пример 2. Равносильные преобразования:

$$\underbrace{2(x+3)=9,\quad x+3=4{,}5,\quad x=1{,}5}_{\text{равносильные уравнения}}$$

В зависимости от значений a и b уравнение $ax + b = 0$ имеет следующие корни:

Уравнение	Значение a	Значение b	Корень уравнения
$5x + 3 = 0$	$a = 5$	$b = 3$	$x = -\frac{b}{a}$, $x = -\frac{3}{5}$, $x = -0{,}6$.
$0 \cdot x + 4 = 0$	$a = 0$	$b = 4$	Нет корней. ($\varnothing$)
$0 \cdot x + 0 = 0$	$a = 0$	$b = 0$	Любое число.

783. 1) 3; 2) 7; 3) –1; 4) 3. **785.** Через 3,5 ч. **788.** 12 л. **789.** 91 дерево; 65 деревьев. **791**. 72 мотора. **792.** 18 км/ч. **794.** 1) 13; 2) 9; 3) –4; 4) –6. **798.** Число 190. **799.** 6 пакетов. **801.** 12,5 г. **803.** 483,6 км. **804.** 10 мин. **806.** 320 см^2. **810.** 1) –8; 2) –4; 3) 5; 4) –3. **811.** 1) 2; 2) 3; 3) 7. **813.** 60 страниц. **814.** 26,4 км/ч. **815.** 9 см. **816.** Через 50 мин. **819.** 1) 2; 2) –1; 3) 1. **820.** 4973 м.

Самостоятельные работы для составления линейного уравнения и нахождения его корня

Задание №1.

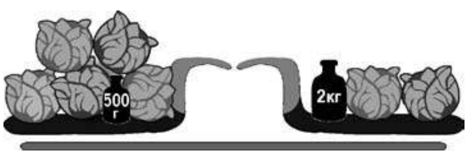
На весах, изображенных на рисунке, на левой чаше 3 пакета с мукой, а на правой – 1 пакет муки и две гири массой по 2 кг.

Составьте по рисунку линейное уравнение, где масса одного пакета муки равна x кг.

Решите уравнение и найдите массу одного пакета муки.

Задание №2.

На левой чаше весов, изображенных на рисунке, находятся 5 кочанов капусты с одинаковой массой и гиря массой 500 г, а на правой чаше – 2 кочана капусты и гиря массой 2 кг.



Составьте по рисунку линейное уравнение, где масса одного кочана капусты равна y кг.

Решите уравнение и найдите массу одного кочана капусты.

Задание №3.

На левой чаше весов, изображенных на рисунке, находятся 4 пачки чая и гиря массой 50 г, а на правой чаше – 1 пачка чая и гиря массой 500 г.

Составьте по рисунку линейное уравнение, где масса одной пачки чая равна x г. Решите уравнение и найдите массу одной пачки чая.

Задание №4.

На левой чаше весов, изображенных на рисунке, находится банка с медом и гиря массой 500 г, а на правой чаше – пустая банка и гири массой 2 кг и 1 кг.

Составьте по рисунку уравнение, где масса пустой банки m кг, а масса меда, налитого в нее, x кг. Решите уравнение и найдите массу меда в банке.

Решите уравнения, содержащие переменную под знаком модуля:

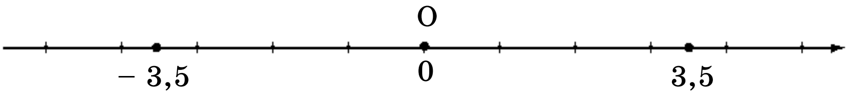
1) $|x| = 2$; 2) $|x| = 3,2$; 3) $|x - 1,5| = 3$; 4) $|x + 6| = 3$.

Образец. Решите уравнение $|x| = 3,5$.

1) Если $x \geqslant 0$, то $x = 3,5$.

2) Если $x < 0$, то $x = -3,5$.

Значит, корнями уравнения $|x| = 3,5$ являются координаты точек на координатной прямой, удаленные от нуля (начала отсчета – точки 0) на расстояние, равное 3,5 единиц. Это точки −3,5 и 3,5.



О т в е т: −3,5; 3,5.

4.3. Линейные уравнения с одной переменной, содержащие переменную под знаком модуля

$|x| = 3$, $|x-4| = 5$, $|2x+3| = 4$, $3|x| - 2 = 7$ – линейные уравнения с одной переменной, содержащие переменную под знаком модуля.

При решении линейных уравнений с одной переменной, содержащих переменную под знаком модуля, используются:

1. $|a-b|$ – расстояние между точками А (a) и В (b) на координатной прямой.

2. Определение модуля, записанное формулой:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

При вычислениях используются следующие свойства модуля:

1^0. $|a| \geqslant 0$; 2^0. $|-a| = |a|$; 3^0. $|ab| = |a| \cdot |b|$;

4^0. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$; 5^0. $|a|^2 = a^2$.

Примеры: 1) $|-3 \cdot 5| = |-3| \cdot |5|$;   2) $\left|\dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{|2|}{|3|}$;   3) $|-7|^2 = 7^2$.

Рассмотрим решение линейного уравнения с одной переменной, содержащего переменную под знаком модуля, двумя способами, используя:

1) $|a-b|$ – расстояние между двумя точками на координатной прямой (1-й способ);

2) определение модуля (2-й способ).

Пример 1. Решить уравнение $|x| = 5$.

Способ 1.

Уравнение $|x| = 5$ запишем в виде $|x-0| = 5$. На координатной прямой имеются две точки, которые удалены от точки с координатой 0 на расстояние, равное 5 единицам. Это точки с координатами −5 и 5 (рис. 4.2).

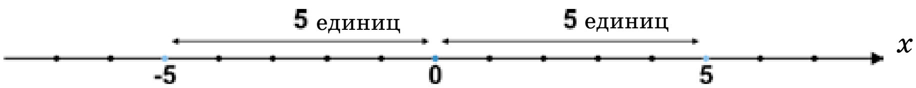


Рис. 4.2

Значит, $x = -5$ и $x = 5$.

Способ 2.

Решение: 1) Если $x \geqslant 0$, то $x = 5$.

2) Если $x < 0$, то $-x = 5$, $x = -5$.

Тогда $x = 5$ или $x = -5$.

О т в е т: -5; 5.

Пример 2.

Решить уравнение $|x-3| = 4$.

Способ 1.

Решение: Корнями уравнения $|x-3| = 4$ являются координаты таких точек, которые удалены от точки с координатой 3 на расстояние, равное 4 единицам.

На координатной прямой от точки с координатой 3 на 4 единицы удалены точки с координатами -1 и 7 (рис. 4.3).

Рис. 4.3

Следовательно, корнями исходного уравнения являются числа -1 и 7. $x = -1$ и $x = 7$.

Способ 2.

Решение: 1) Если $x - 3 \geqslant 0$, то $x - 3 = 4$. $x = 7$.

2) Если $x - 3 < 0$, то $-(x - 3) = 4$, $x - 3 = -4$, $x = -1$.

Значит, $x = 7$ или $x = -1$.

О т в е т: -1; 7.

Пример 3.

Решить уравнение $|x+1| = 6$.

Способ 1.

Решение: Уравнение $|x+1| = 6$ запишем в виде $|x-(-1)| = 6$.

На координатной прямой от точки с координатой -1 на 6 единиц удалены точки с координатами -7 и 5 (рис. 4.4).

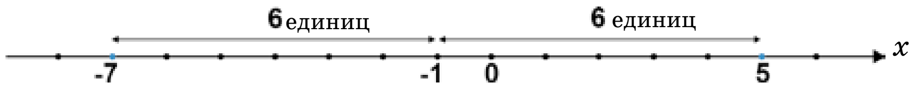


Рис. 4.4

Следовательно, числа -7 и 5 являются корнями исходного уравнения; $x = -7$ и $x = 5$.

Способ 2.

Решение: 1) Если $x + 1 \geqslant 0$, то $x + 1 = 6$, $x = 5$.

2) Если $x + 1 < 0$, то $-(x + 1) = 6$, $x + 1 = -6$, $x = -7$.

Значит, $x = 5$ или $x = -7$.

Ответ: -7; 5.

Пример 4. Уравнение $|5x+1| = -6$ не имеет корней, так как модуль числа не может быть отрицательным.

1. На каком расстоянии от начала отсчета на координатной прямой изображаются корни уравнения $|x| = 4$?
2. На каком расстоянии от точки 3 изображаются корни уравнения $|x - 3| = 7$?

821. Выполните цепочку действий (устно):

1)	2)	3)	4)
$-2{,}1$	$-\frac{1}{4}$	$-3{,}2$	$-6{,}3$
$+3$	$+1$	$:(-4)$	$\cdot 2$
$\cdot(-2)$	$\cdot(-4)$	-5	$:(-3)$
$-1{,}2$	$-2{,}5$	$\cdot 10$	-6
$+7{,}5$	$\cdot 10$	$:(-100)$	$+2$
?	?	?	?

822. Какое уравнение имеет решение, а какое – нет? Почему? (Устно.)

1) $|x| = 3$;
2) $|x| = -3{,}9$;
3) $|y| = -1{,}6$;
4) $|y| = \frac{1}{5}$;
5) $|-m| = -8$;
6) $-|n| = -9$.

A

823. Решите уравнения, пользуясь понятием «расстояние»:

1) $|a| = 8$;
2) $|-b| = 9$;
3) $-|c| = -3$;
4) $|d| = 0$;
5) $-|-x| = 10$;
6) $-|-y| = -4$.

Решите уравнения **(824, 825)**.

824. 1) $|x| + 3 = 5$;
2) $|y| - 2 = 1$;
3) $|2x| + 3 = 9$;
4) $|5y| - 4 = 6$;
5) $\frac{3}{7} + |4x| = 1$;
6) $4 + |3y| = 7$.

825. 1) $|x + 3| = 0$;
2) $|x - 5| = 0$;
3) $|1 + x| = 0$;
4) $|2 - x| = 0$;
5) $|x - 3| + 0{,}5 = 0{,}5$;
6) $|9 + x| - 0{,}7 = -0{,}7$.

826. Куб с ребром 20 см разрезан на кубики с ребром 1 см. Если из этих кубиков построить башню, ставя их друг на друга, то на какую высоту она поднимется?

B

Решите уравнения **(827–832).**

827. 1) $|x-4|=2$; 3) $|3+x|=1{,}5$; 5) $|x+3|+4=9$;

2) $|y+5|=3$; 4) $|7-y|=-2$; 6) $|y-2|+8=5$.

828. 1) $|2x-5|=0$; 3) $|2-3x|=0$; 5) $|3x+1|+2^3=8$;

2) $|4x-3|=0$; 4) $|4-5x|=0$; 6) $|9x+2|-3^3=(-3)^3$.

829. 1) $5|x|+3=7$; 2) $1{,}7|x|+4{,}9=10$; 3) $2{,}5|3y|=15$.

830. 1) $|2x+14|=6$; 3) $|8x+12|=20$; 5) $|9x+15|=6$;

2) $|9x-18|=27$; 4) $|15x-10|=5$; 6) $|8x-6|=14$.

831. 1) $\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{5}{8}$; 3) $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{2}{5}$; 5) $\left|\frac{3}{y}\right|=\frac{5}{6}$;

2) $\left|\frac{1}{y}\right|=\frac{2}{7}$; 4) $\left|\frac{2}{x}\right|=\frac{1}{3}$; 6) $\left|\frac{4}{x}\right|=\frac{8}{9}$.

832. 1) $\big||x|-3\big|=0$; 2) $\big|5-|x|\big|=0$; 3) $\big||x|+3\big|=0$; 4) $\big|7-|x|\big|=0$.

833. Решите с помощью графа задачу.
Коля, Саша, Мирас и Ринат участвуют в художественной самодеятельности школы. Один из них играет на гитаре, другой – на гармони, третий поет, а четвертый танцует.
1) Коля играет на гитаре, Саша играет на гармони.
2) Ринат танцует, Мирас играет на гитаре.
3) Коля поет, Саша танцует.
Одно из этих утверждений верное, а другое – ложное. Каким видом художественной самодеятельности занимается каждый из ребят?

C

Решите уравнения **(834–836).**

834. 1) $9|x|-2|x|-8=5|x|$; 3) $2|x|+3|x|-18=|x|-7|x|+15$.

2) $7|x|-2|x|=3|x|+12$; 4) $4|x|+5|x|-3=2|x|+11$.

Образец: Найдем корни уравнения: $6|x| - 5 = 2|x| + 7$.

Решение.
$6|x| - 2|x| = 7 + 5$,
$(6 - 2) \cdot |x| = 12$,
$4|x| = 12$,
$|x| = 3$,
$x = 3$ и $x = -3$.
Ответ: -3; 3.

Проверка.
1) $x = 3$.
$6 \cdot |3| - 5 = 2 \cdot |3| + 7$,
$6 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot 3 + 7$,
$13 = 13$.

2) $x = -3$.
$6 \cdot |-3| - 5 = 2 \cdot |-3| + 7$,
$6 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot 3 + 7$,
$13 = 13$.

835. 1) $|x+1,7| \cdot (2x+3) = 0$; 2) $|x-4| \cdot (2x+7) = 0$; 3) $|5x-8| \cdot (x-6) = 0$.

836*. 1) $||2x+3|-2| = 5$; 2) $||3x-2|+3| = 7$; 3) $||4x+3|-5| = 8$.

Образец: Найдем корни уравнения $||5x-4|+2| = 7$.

Решение:

$|5x-4|+2 = 7$ или $|5x-4|+2 = -7$.

$|5x-4| = 5$; $|5x-4| = -9$ нет решений.

$5x - 4 = 5$ или $5x - 4 = -5$,
$5x = 9$, $5x = -1$,
$x = 1,8$. $x = -0,2$.
Ответ: $-0,2$; $1,8$.

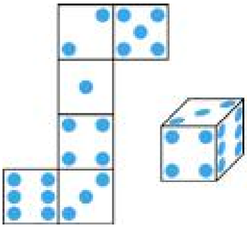


Рис. 4.5

837. Охарактеризуйте событие, о котором идет речь, как достоверное, невозможное или случайное.
Бросают игральный кубик (рис. 4.5).
а) выпадает больше шести очков;
б) выпадает меньше семи очков;
в) выпадает тройка.

823. 1) Расстояние от 0 до a равно 8 единицам, $a = -8$ и $a = 8$; 5) Нет решений, так как расстояние не может быть отрицательным. **826.** 80 м. **829.** 1) $-0,8$; $0,8$; 2) -3; 3. **830.** 1) -10; -4; 2) -1; 5; 3) -4; 1; 6) -1; $2,5$. **831.** 1) $-1,6$; $1,6$; 5) $-3,6$; $3,6$; **832.** 1) -3; 3; 3) Нет решений; 4) -7; 7. **834.** 1) -4; 4; 2) -6; 6. 3) -3; 3. **835.** 1) $-1,7$; $-1,5$; 2) $-3,5$; 4; 3) $1,6$; 6. **836.** 1) -5; 2; 2) $-\frac{2}{3}$; 2; 3) -4; $2,5$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

A

838. Используя свойства верных числовых равенств, запишите верное числовое равенство, которое получится, если:

1) к обеим частям равенства
$3{,}6 \cdot (-4) = 72 : (-5)$
прибавить: $-5{,}6$; $4\frac{2}{5}$;

2) обе части равенства $2{,}4 - 12{,}9 = 63 : (-6)$ умножить на -4; на 2.

839. Решите уравнения:

1) $3x - 15 = x + 3$; 3) $2(x + 3) = x + 13$; 5) $3(x - 2) = x + 4$;
2) $7 - 3x = x + 11$; 4) $4(5 - x) = 3x - 1$; 6) $5(x - 1) = 4x + 3$.

840. Если автомобиль из пункта A выедет со скоростью 50 км/ч, то он прибудет в пункт B в назначенное время. Если автомобиль увеличит скорость на 10 км/ч, то он прибудет в пункт B на 1 ч раньше назначенного времени. Найдите расстояние между пунк-тами A и B.

841. Решите уравнения:

1) $|y| = 9$; 3) $|y| = \frac{5}{9}$; 5) $|y - 2| = 5$;
2) $|x| = 1{,}6$; 4) $|x + 7| = 10$; 6) $|y - 1{,}7| = 4$.

B

Решите уравнения **(842–844)**.

842. 1) $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = \frac{x}{6} + 1$; 2) $\frac{y}{2} - \frac{y}{8} = \frac{y}{4} - 1$;

3) $\frac{5x}{12} - \frac{4x}{15} = \frac{x}{20} + 1$; 4) $\frac{x}{3} - \frac{2x}{9} = \frac{x}{6} + \frac{1}{2}$.

843. 1) $|x - 1{,}5| = 4$; 3) $|2x - 3| = 0$; 5) $|x + 1| + 5 = 3$;
2) $|3 - x| = 5$; 4) $|6 - 5x| = 0$; 6) $|x + 5| - 2 = 7$.

844. 1) $|10x + 6| = 4$; 3) $|3x - 9| = 6$; 5) $|2{,}4x + 1{,}2| = 6$;
2) $\left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{4}$; 4) $\left|\frac{5}{m}\right| = \frac{2}{3}$; 6) $\left|\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{4}$.

845. Дедушке 58 лет, его сыну 32 года, внукам 11 и 7 лет. Через сколько лет возраст дедушки будет равен сумме возрастов его сына и внуков?

C

Решите уравнения (**846, 847**).

846*. 1) $\dfrac{4}{1+\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{1+x}}}=3$; 2) $\dfrac{5}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{3}{2+x}}}=1$; 3) $\dfrac{6}{5+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{3+x}}}=1$.

847*. 1) $\left||8x+1|-2\right|=9$; 2) $\left|4+|5x+2|\right|=9$; 3) $\left||10x+7|-5\right|=13$.

848. Второе число на 3 больше первого. Частное от деления первого числа на 4 равно частному от деления второго числа на 5. Найдите первое число.

842. 1) 1,5; 2) –8; 3) 10; 4) –9. **843.** 1) –2,5; 5,5; 4) 1,2. **844.** 1) –1; –0,2; 3) 1; 5; 5) –3; 2. **846.** 1) –0,75; 2) –4,25; 3) $-3\dfrac{1}{3}$. **847.** 1) –1,5; 1,25; 2) –1,4; 0,6; 3) –2,5; 1,1. **848.** 12 – первое число.

Чтобы определить, какое из двух сравниваемых чисел больше или меньше, следует рассмотреть разность данных двух чисел и сделать вывод.

Сравниваемые числа	Вычтите из первого числа второе и запишите в виде разности	Разность числа (положительная или отрицательная)	Числовое неравенство
5 и 3 –2 и –4 3 и 6	5 – 3	$2>0$	$5>3$

Подумайте, как ответить на следующие вопросы:

1) Если значение разности $a-b$ – положительное число, то при сравнении чисел a и b какое из этих чисел больше?

$a\ \square\ b.$

2) Если значение разности $a-b$ – отрицательное число, то при сравнении чисел a и b какое из этих чисел больше?

$a\ \square\ b.$

Глава V. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ СИСТЕМЫ

5.1. Числовые неравенства

Задача. Сравните площадь прямоугольника длиной 7 см, шириной 4 см и площадь квадрата со стороной 5 см.

Результат сравнения запишите в виде неравенства.

Решение. $7 \cdot 4$ – площадь прямоугольника; 5^2 – площадь квадрата.

$7 \cdot 4 > 5^2$ – числовое неравенство.

Запись, в которой знаком неравенства (> или <) соединены два числовых выражения, называют *числовым неравенством*.

Выражение, записанное слева от знака неравенства, называют *левой частью* неравенства, выражение, записанное справа – *правой частью* неравенства.

Например, $\underbrace{9 \cdot 3 + 5}_{\text{левая часть}} > \underbrace{4 \cdot 6}_{\text{правая часть}}$ – числовое неравенство.

?

Задание. Сравните числа a и b, где:

1) $a = 7$; $b = 4$; 3) $a = 3$; $b = 8$;

2) $a = 0{,}9$; $b = 0{,}5$; 4) $a = 6$; $b = 10$.

Подсказка.

1. Вычислите значение разности $a - b$.
2. Сравните $a - b$ с числом 0.
3. Сравните числа a и b.
4. Сформулируйте правило сравнения чисел a и b по их разности.

Проверьте себя.

Заполните таблицу.

1. Значение разности $a - b$	2. Сравнение $a - b$ и 0	3. Сравнение a и b
$a - b = 7 - 4 = 3$	$3 > 0$	$a > b$
$a - b =$		
$a - b =$		
$a - b = 6 - 10 = -4$	$-4 < 0$	$a < b$

4. **Если значение разности $a - b$ – положительное число, то число a больше числа b.**

$$\boxed{\text{Если } a - b > 0, \text{ то } a > b.}$$

Если значение разности $a - b$ – отрицательное число, то число a меньше числа b.

$$\boxed{\text{Если } a - b < 0, \text{ то } a < b.}$$

Если неравенства записываются знаками $<$ или $>$, то их называют строгими неравенствами.

Пример 1. $\frac{5}{7} > \frac{2}{7}$; $9 + 7 < 20$ – строгие числовые неравенства.

Неравенства $x > -3$ и $x < 2$ можно записать в виде двойного строгого неравенства $-3 < x < 2$ (читается: «x больше -3, но меньше 2»).

Если неравенства записываются знаками $\geqslant$ (больше или равно) или $\leqslant$ (меньше или равно), то их называют нестрогими неравенствами.

Пример 2.

1) Нестрогое неравенство $a \geqslant 5$ читается так: «число a больше или равно пяти», то есть «число a не меньше пяти».

2) Нестрогое неравенство $b \leqslant 4$ читается так: «число b меньше или равно числу 4», то есть «число b не больше четырех».

3) Нестрогое двойное неравенство $3 \leqslant x \leqslant 7$ читается так: «x больше или равен 3, но меньше или равен 7»; можно читать и так: «Число x не меньше трех, но не больше семи».

Неравенства $a > b$ и $c > d$ называются *неравенствами одного знака*; неравенства $a > b$ и $c < d$ называются *неравенствами противоположных знаков*.

Пример 3. 1) $6 \cdot 2 > 3 \cdot 3$ и $18 : 2 > 7$ – числовые неравенства одного знака.

2) $9 \cdot 7 > 52$ и $28 < 19 + 17$ – числовые неравенства противоположных знаков.

1. Что называется числовым неравенством?
2. Как узнать, какое из данных чисел a и b больше, а какое – меньше?
3. В чем отличие нестрогого неравенства от строгого? Приведите примеры.

849. Известно, что $a > b$. Может ли разность $a - b$ выражаться числом: $-1,5$; 0; 2,6?

А

850. Из данных неравенств выберите верные:

1) $5,6 > 4,3$; 3) $\frac{2}{5} > \frac{1}{5}$; 5) $-0,9 < 1$;

2) $-9,7 > 6,5$; 4) $\frac{1}{2} < \frac{1}{4}$; 6) $0,1 > 0$.

851. На координатной прямой даны точки *A*, *B*, *C* (рис. 5.1). Сравните координаты точек *A* и *B*; *B* и *C*; *A* и *C*. Запишите в виде числовых неравенств.

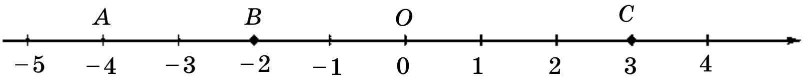


Рис. 5.1

852. Запишите в виде неравенства. Обозначьте неизвестную величину буквой x.

1. Объем жидкости в сосуде не больше 3 л.
2. Скорость течения воды в реке меньше 4 км/ч.
3. Сегодня температура воздуха в городе Тараз не ниже 5°С.
4. Градусная мера тупого угла больше 90°, но меньше 180°.

853. Заполните таблицу. Вместо звездочки запишите соответствующие знаки $>$ или $<$ так, чтобы числовое неравенство было верным.

a	b	$a - b$	$a * b$
3	7		
6	−4		
9	5		
−13	−8		

854. Выполните действия:

1) $16,92 : (12,3 - 17) \cdot \left(-2\dfrac{1}{2}\right)$;

2) $(49,3 - 27,8) \cdot \left(-1\dfrac{3}{5}\right) - 0,6$;

3) $99,9 - (5,3 + 12 \cdot (-0,2))$;

4) $(15 - 19,2) : (-0,7) - 7,8$.

B

855. Запишите в виде неравенства:

1) В классе ежедневно бывает не больше 6 уроков.
2) На секции легкой атлетики ребят в одной группе не меньше 12, но не больше 16.

856. Используя определение числового неравенства, сравните:

1) $1,5$ и $1\dfrac{1}{5}$; 2) $\dfrac{1}{4}$ и $0,4$; 3) $\dfrac{17}{50}$ и $0,22$;

4) $-2{,}5$ и $-2{,}3$; 5) $\frac{8}{25}$ и 1; 6) $-0{,}3$ и 0.

857. Запишите в виде двойного числового неравенства:

1) $7 < 15$ и $15 < 20$;
2) $0{,}8 > 0{,}3$ и $0{,}8 < 1$;
3) $-1 > -5$ и $-1 < 0$;
4) $m + n < k$; $k < p + z$.

858. Сравните, запишите результат в виде неравенства:

1) $x+\frac{3}{5}$ и $x+\frac{4}{5}$;
2) $x-3$ и $x-4$;
3) $x+\frac{2}{9}$ и $\frac{5}{9}+x$;
4) $x-5$ и $x-7$.

859. Сравните числа a и b по их разности. Запишите неравенство.

1) $a - b = -3$;
2) $a-b=\frac{2}{7}$;
3) $a - b = 0$;
4) $a - b = -0{,}5$;
5) $b - a = 1$;
6) $b - a = -0{,}99$.

860. Запишите, используя знак неравенства.
Сегодня в Усть-Каменогорске температура воздуха -3°C.
1) В Павлодаре температура воздуха t°C, но не выше температуры воздуха в Усть-Каменогорске.
2) В Алматы температура воздуха t°C, но не ниже температуры воздуха в Усть-Каменогорске.
3) Температура воды t°C, это не ниже 0°C, но не выше 100°C.

861. На уроке физкультуры дети бежали дистанцию 100 м. Игорь пробежал дистанцию за 16 с, а Сергей – за 18 с. У кого из ребят скорость больше? Ответ запишите с помощью числового неравенства.

862. Заполните магические квадраты:

9		5
	11	
		13

7		
5	9	
15		

		17
11		27
		13

863. Скорость звука в воздухе равна 330 м/с. Одно и то же расстояние звук преодолевает в воздухе за 2 с, а в воде – за 0,44 с. Найдите скорость звука в воде и сравните ее со скоростью звука в воздухе.

864. Автобус в первый день проехал $\frac{1}{4}$ пути, во второй день – $\frac{2}{3}$ пути, пройденного в первый день, а в третий день – оставшиеся 126 км. На каждые 4 км автобус расходовал 0,6 л бензина. Сколько литров бензина израсходовано автобусом на весь путь?

A. 34,8 л; **B.** 30,9 л; **C.** 32,4 л; **D.** 30,5 л.

865. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $\frac{a+2}{4}+\frac{3a-1}{3}+\frac{a-2}{2}$ при $a=-2$;

2) $\frac{2b+3}{4}+\frac{b-1}{2}+\frac{3}{4}$ при $b=-3$;

3) $\frac{4a-1}{3}-\frac{2a+3}{6}-\frac{1}{6}$ при $a=5$.

C

866. Сравните значения выражений. Запишите результаты в виде неравенства:

1) $x+0{,}5$ и $x-(-0{,}3)$;

2) $y+\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $y-\left(+\frac{1}{2}\right)$;

3) $n:(-7)$ и $n:7$;

4) $(-n):(-3)$ и $n:(-3)$.

867. Докажите верность неравенств:

1) $2{,}8a+3\frac{1}{2}\geqslant 6{,}3$ при $a\geqslant 1$;

2) $1{,}3+\frac{2b}{3}<1{,}3$ при $b<0$;

3) $5{,}1a-\frac{5}{9}<0$ при $a<0$;

4) $4{,}6+\frac{3}{4}a>-10$ при $a>0$.

Составьте неравенства по содержанию задач и решите их **(868–870)**.

868. Гульжан и Лена купили тетради. Гульжан купила тетради по цене 20 тг, а Лена – по цене 30 тг. У Лены оказалось в 2 раза меньше тетрадей, чем у Гульжан. Кто из них заплатил больше?

869. В трех коробках лежат 12 карандашей. Количество карандашей в третьей коробке больше, чем количество карандашей в первой коробке, но меньше, чем во второй коробке. Если в третьей коробке будет 4 карандаша, то сколько карандашей может быть в первой и второй коробках? Сколько решений имеет задача?

870. В 11 часов из города A в город B выехала грузовая машина со скоростью 60 км/ч. Через 1 ч 30 мин навстречу ей из города В выехала легковая машина со скоростью 100 км/ч. Они встретились в 14 ч. К какому городу ближе они встретились?

871. Дополните четырехугольник $ABCD$ и треугольник EFK до прямоугольников (рис. 5.2). Найдите площадь каждой фигуры в квадратных сантиметрах. Площадь четырех клеток тетради примите за 1 см^2.

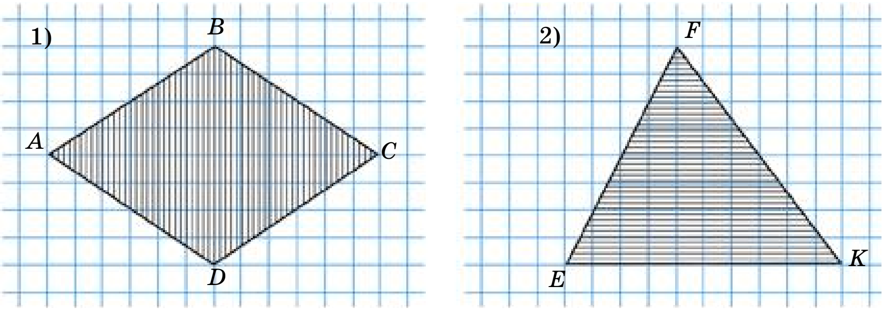


Рис. 5.2

872. Решите уравнения:

1) $\dfrac{x+9}{7}=1+\dfrac{x+1}{3}$;

2) $1-\dfrac{5x-2}{6}=\dfrac{x-5}{9}$;

3) $\dfrac{3x+4}{5}+\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{2(2x+3)}{5}$;

4) $\dfrac{7x-3}{2}-\dfrac{9-4x}{3}=\dfrac{7-x}{2}$.

Ключевые факты.

Числовые неравенства.

Числовое неравенство – это запись, где два числовых выражения соединены знаком неравенства ($>$ или $<$).

Пример 1. $-3 < 2$; $4 \cdot 5 + 5 > 11$ – числовые неравенства.

Если разность $a - b$ положительна, то $a > b$.

Если разность $a - b$ отрицательна, то $a < b$.

Пример 2. 1) $11 \cdot 2 > 4^2$, так как $11 \cdot 2 - 4^2 = 22 - 16 = 6$; $6 > 0$.
2) $3^2 + 4 < 5^2$, так как $(3^2 + 4) - 5^2 = 13 - 25 = -12$; $-12 < 0$.

854. 1) 9; 2) –35; 3) 97; 4) –1,8. **865.** 1) $-4\dfrac{1}{3}$; 2) –2; 3) 4. **869.** Три решения. **871.** 1) 12 см^2; 2) 10 см^2. **872.** 1) –0,25; 2) 2; 3) 13; 4) 1,5.

Поставьте вместо звездочки соответствующий знак неравенства:

1) если $5 > 3$, то $3 * 5$;

2) если $9 > 7$ и $7 > 5$, то $9 * 5$;

3) если $6 > 2$, то $6 + 1\frac{1}{4} * 2 + 1\frac{1}{4}$; $6 - 1,5 * 2 - 1,5$;

4) если $16 > 12$, то $\frac{16}{4} * \frac{12}{4}$; $16 \cdot 3 * 12 \cdot 3$;

5) если $17 > 11$, то $\frac{1}{17} * \frac{1}{11}$.

6) Сложите почленно неравенства:

$$+\begin{array}{c} 0,9 > 0,2 \\ \underline{5,1 > 3,8} \\ ? > ? \end{array}$$

7) Перемножьте почленно неравенства:

$$\times\begin{array}{c} 6 < 9 \\ \underline{0,5 < 4} \\ ? < ? \end{array}$$

5.2. Свойства числовых неравенств

При преобразовании числовых неравенств используются их свойства. Рассмотрим свойства числовых неравенств и научимся их применять.

Свойство 1. *Если число* ***a*** *больше числа* ***b****,* а *число* ***b*** *больше числа* ***c****, то число* ***a*** *больше числа* ***c****.*

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Неравенство $a > b$ означает, что на координатной прямой число a изображается правее числа b, а неравенство $b > c$, – что число b изображается правее числа c (рис. 5.3). Значит, на координатной прямой число a изображается правее числа c.

То есть $a > c$.

Рис. 5.3

Пример 1. 1) $7 > 5$ и $5 > 3$, то $7 > 3$; 2) $2 < 5$ и $5 < 9$, то $2 < 9$.

Свойство 2. *Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство.*

Если $a > b$ и c – любое число, то $a + c > b + c$.

Пример 2.

1) $9 > 6$
$9 + 2 > 6 + 2$
$11 > 8$

2) $9 > 6$
$9 + (-2) > 6 + (-2)$
$7 > 4$

a) *b)*

Рис. 5.4

При перемещении точек, изображающих числа 6 и 9, на одно и то же расстояние – вправо или влево – их взаимное расположение не изменится (рис. 5.4, *a*) и *b*)).

Пример 3. Неравенство $7{,}2 + 3 > 8{,}1$ можно записать в виде $7{,}2 + 3 - 3 > 8{,}1 - 3$, или $7{,}2 > 8{,}1 - 3$.

Любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный.

Свойство 3. а) *Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство того же знака.*

Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$; $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Пример 4. 1) Обе части неравенства $9 > 6{,}2$ умножим на 2: $9 \cdot 2 > 6{,}2 \cdot 2$; $18 > 12{,}4$.

2) Обе части неравенства $15{,}5 > 10$ разделим на 5: $15{,}5 : 5 > 10 : 5$; $3{,}1 > 2$.

б) *Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.*

Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$; $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Пример 5. 1) Умножим обе части неравенства $3{,}1 > 2{,}3$ на (-2): $3{,}1 \cdot (-2) < 2{,}3 \cdot (-2)$; $-6{,}2 < -4{,}6$.

2) Обе части неравенства $12 > 7$ разделим на (-3):

$$-\frac{12}{3} < -\frac{7}{3};\ -4 < -2\frac{1}{3}.$$

Свойство 4. *Если сложить почленно два верных неравенства одного знака, то получится верное неравенство того же знака.*

Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Примеры:

1) $\begin{array}{r} +\,5{,}3 > 2{,}7 \\ 1{,}5 > 0{,}8 \\ \hline 6{,}8 > 3{,}5; \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} +\,2{,}7 < x < 6{,}5 \\ 4{,}5 < y < 7 \\ \hline 7{,}2 < x + y < 13{,}5; \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} +\,8 < x < 15 \\ 2 < y < 4 \\ \hline 10 < x + y < 19. \end{array}$

Свойство 5. *Если перемножить почленно два верных неравенства одного знака, левая и правая части которых – положительные числа, то получится верное неравенство того же знака.*

Если $a > b$, $c > d$ и a, b, c, d – положительные числа, то $ac > bd$.

Примеры:

1) $\begin{array}{r} \times\,0{,}3 > 0{,}2 \\ 4 > 1{,}5 \\ \hline 1{,}2 > 0{,}3 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \times\,9 < x < 12 \\ 4 < y < 7 \\ \hline 36 < xy < 84 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} \times\,1\frac{7}{8} < 2 \\ 8 < 10 \\ \hline 15 < 20 \end{array}$

Свойство 6. Если a и b – положительные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Примеры: 1) Если $3 < 4$, то $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$; 2) если $7 > 5$, то $\frac{1}{7} < \frac{1}{5}$.

1. Как перенести слагаемое из одной части неравенства в другую?
2. Как изменится знак верного неравенства, если обе его части умножить или разделить на одно и то же отрицательное число?
3. Какие верные неравенства можно умножать почленно?

873. Сложите почленно неравенства (устно):

1) $\begin{array}{r} +\,9{,}7 > 7 \\ 2 > 1 \\ \hline ? \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} -5 < 2{,}3 \\ +\,3 < 7 \\ \hline ? \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 2{,}5 < x < 8{,}2 \\ +\,1 < y < 7 \\ \hline ? \end{array}$

A

874. Начертите в тетради координатную прямую. Отметьте точки с координатами $-b$ и a, как на рисунке 5.5.

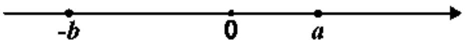


Рис. 5.5

- Изобразите на координатной прямой числа: b, $-a$ и $2a$.
- Сравните числа: 1) $-b$ и a; 2) $2a$ и a; 3) $-a$ и a; 4) b и $2a$.

875. Используя свойства неравенства, запишите верное неравенство, которое получится, если:

1) к обеим частям неравенства $8 < 13$ прибавить число: 5; 4; -2; -6;
2) обе части неравенства $18 > 6$ умножить на: 4; 5; -1, $-0{,}5$;
3) обе части неравенства $24 > 12$ умножить на: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$.

876. Сложите почленно неравенства:

1) $5 < 9$ и $3 < 4$;
2) $3 > 1$ и $5 > -2$;
3) $2 < 3$ и $4 < 7$;
4) $4{,}2 > 3$ и $5 > -1$;
5) $0{,}3 < 1{,}2$ и $4 < 5$;
6) $1{,}8 > 1$ и $2 > 0{,}8$.

877. Перемножьте почленно неравенства:

1) $4 > 1$ и $7 > 5$;
2) $5 < 9$ и $2 < 4$;
3) $0{,}5 < 3$ и $4 < 5$;
4) $6 > 4$ и $7 > 2$;
5) $9 < 12$ и $3 < 5$;
6) $8 > 3$ и $6 > 2$.

878. Из одного пункта одновременно в противоположных направлениях выехали велосипедист и мотоциклист. Скорость велосипедиста x км/ч, а скорость мотоциклиста y км/ч. Зная, что $x > 13$ и $y > 38$, оцените расстояние между ними через час.

879. В первый день токарь изготовил x деталей, а во второй день – y деталей. Оцените, на сколько больше деталей он изготовил в первый день, чем во второй, если $x > 120$, $y < 100$?

880. Сторона квадрата больше 4 см, но меньше 5 см. Оцените периметр квадрата.

881. У прямоугольника длина больше 4,5 см, но меньше 6 см. Ширина его больше 2 см, но меньше 3,2 см. Оцените площадь прямоугольника.

882. Найдите значение выражений:

1) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\cdot 6$ при $x = 4$; $y = -1$;

2) $\left(\frac{x}{4}-\frac{y}{12}\right)\cdot 12$ при $x = -2$; $y = 3$;

3) $\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{5}\right)\cdot 3$ при $x = 1$; $y = 2$;

4) $\left(\frac{5x}{6}-\frac{3y}{8}\right)\cdot 4$ при $x = 6$; $y = 2$.

B

883. Выполните почленное сложение неравенств:

1) $7 < 15$ и $2{,}7 < 3{,}2$;
3) $\frac{7}{12} > \frac{3}{8}$ и $0{,}2 < \frac{1}{4}$;
2) $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$ и $\frac{1}{4} < 3$;
4) $\frac{2}{15} < \frac{3}{5}$ и $\frac{2}{3} < \frac{14}{15}$.

884. Известно, что $4 < a < 5$. Оцените значение выражения:

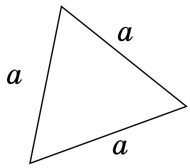
1) $a + 3$; 2) $a - 0{,}6$; 3) $2a$; 4) $\frac{a}{2}$.

885. Оцените значение выражения $\frac{1}{a}$, если:

1) $3 < a < 7$; 2) $4 < a < 9$; 3) $\frac{1}{9} < a < \frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{8} < a < \frac{1}{4}$.

886. Используя свойства неравенств, запишите верное неравенство, которое получится, если:
1) к обеим частям неравенства $3a - 5 > 2a - 1$ прибавить число: 7; $4a$; -3; $-2a$;
2) обе части неравенства $3{,}2m - 2{,}4 < 5{,}6m - 1{,}6$ умножить на: 5; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$.

887. 1) Оцените периметр квадрата со стороной a дм, если $0{,}8 < a < 0{,}9$.
2) Оцените длину стороны a равностороннего треугольника, периметр которого равен p см, если $7\frac{1}{5} \leqslant p \leqslant 7{,}5$.



888. Как от ленты длиной $\frac{3}{4}$ м отрезать $\frac{1}{2}$ м, не пользуясь никакими измерительными приспособлениями?

889. На пошив одного платья расходуется больше 2 м, но меньше 3 м ткани. Оцените расход ткани для пошива 5 платьев.

890. Алихан купил 3 ручки по a тг и 2 общих тетради по b тг. Оцените стоимость покупки Алихана, если $a < 60$, $b < 150$.

891. Длина прямоугольника x см, ширина y см. Оцените площадь прямоугольника, если $7 < x < 9$ и $3 < y < 5$.

892. Известно, что $2 < a < 5$ и $4 < b < 10$. Оцените:
1) $a + b$; 2) $a \cdot b$; 3) $\frac{a}{b}$.

893. В книге 120 страниц. Ученик в первый день прочитал x страниц книги, это больше $\frac{1}{5}$, но меньше $\frac{1}{4}$ страниц книги. Во второй день он прочитал y страниц книги, что больше $\frac{1}{6}$, но меньше $\frac{1}{5}$ страниц книги. Оцените, сколько страниц книги мог прочитать ученик за два дня.

894. Решите уравнения:

И. $\frac{5x+1}{3} = \frac{1+8x}{5}$; А. $\frac{5x+8}{3} + \frac{11x-1}{6} = -1$;

З. $\frac{4x-5}{7} - \frac{9x-25}{2} = 0$; Я. $\frac{4x+9}{5} - \frac{4+3x}{2} = 4$.

−1	3	−2	−6

В таблице под полученными корнями уравнений запишите указанные буквы, тогда вы прочитаете название самой большой части земного шара.

C

895. Известно, что $a>b$. Сравните выражения:

1) $\frac{3}{4}a$ и $\frac{3}{4}b$; 3) $\frac{a}{3}$ и $\frac{b}{5}$; 5) $\frac{a+5}{4}$ и $\frac{b-5}{4}$;

2) $-2a$ и $-2b$; 4) $-\frac{a}{7}$ и $\frac{b}{7}$; 6) $-2\frac{3}{5}a$ и $-2\frac{3}{5}b$.

896. Известно, что $4 < x < 8$. Оцените значение выражения:

1) $2x$; 2) $2x + 1$; 3) $\frac{x}{2}$.

Образец. Оценим значение выражения $3x$, если $2 < x < 5$.
Решение.
$3 \cdot 2 < 3x < 3 \cdot 5$; $6 < 3x < 15$.

897. Используя свойства числовых неравенств, докажите:
1) если $3x < 8 - x$, то $x < 2$;
2) если $4x - 3 < 12 + x$, то $x < 5$;
3) если $5 + 4x > 20 - x$, то $x > 3$;
4) если $2(3 + x) > 18 - 4x$, то $x > 2$.

898. Оцените выражение:

1) $x + y$, если: а) $4 < x < 7$; $-6 < y < 9$; б) $0{,}6 < x < 1{,}8$; $1{,}2 < y < 2$.

2) $x - y$, если: а) $7 < x < 10$; $3 < y < 6$; б) $2{,}1 < x < 3{,}4$; $0{,}4 < y < 1{,}8$.

Образец. Дано $10 < x < 14$ и $2 < y < 5$;

а) оценим $x + y$:
$$+\begin{array}{c} 10 < x < 14 \\ 2 < y < 5 \\ \hline 12 < x + y < 19; \end{array}$$

б) оценим $x - y$:
$$+\begin{array}{c} 10 < x < 14 \\ -5 < -y < -2 \\ \hline 5 < x - y < 12. \end{array}$$

899. Оцените произведение xy:

1) $\frac{5}{12} < x < 2\frac{1}{4}$ и $\frac{4}{5} < y < 1\frac{1}{3}$;

2) $1\frac{3}{5} < x < 3\frac{1}{9}$ и $\frac{5}{8} < y < 1\frac{2}{7}$;

3) $2\frac{4}{5} < x < 4\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{7} < y < 2$;

4) $0{,}5 < x < 1{,}9$ и $0{,}8 < y < 2$.

900. Пусть $2{,}7 < x < 9$ и $1{,}5 < y < 3$. Оцените:

1) $2xy$; 2) $2xy + 1$; 3) $\frac{x}{y} + 4$.

901. Борис и Марат собирали в саду яблоки. Количество яблок, собранных Борисом, больше 11, но меньше 15. Количество яблок, собранных Маратом, больше 9, но меньше 13. Все собранные яблоки Борис, Марат и двое их друзей разделили между собой поровну. Оцените, по сколько яблок получил каждый мальчик.

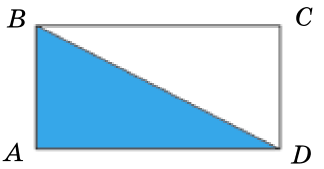


Рис. 5.6

902. У прямоугольника $ABCD$ длина a см, ширина b см. Оцените площадь прямоугольного треугольника ABD, если известно, что $a < 8$; $b < 5$ (рис. 5.6).

903. Собственная скорость катера x км/ч, скорость течения реки 2 км/ч. Оцените расстояние, которое проплывет катер по течению за 1,5 ч, если $x < 18$.

904. Вычислите:

$$\left(\frac{\left(3{,}9 - 1\frac{4}{5}\right) \cdot 1\frac{2}{3}}{\left(6\frac{3}{4} - 2{,}5\right) : 5\frac{2}{3}} + \frac{\left(\frac{3}{5} - \frac{7}{18}\right) : 3\frac{1}{6}}{\left(\frac{5}{12} - \frac{4}{15}\right) \cdot \frac{5}{9}}\right) \cdot 2{,}5 - 5\frac{2}{3}.$$

Ключевые факты.

Свойства числовых неравенств

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$, где a, b и c – рациональные числа.

Если $a > b$, то $a + c > b + c$; $a - c > b - c$.

Если $a > b$; $a > 0$; $b > 0$:

$a \cdot c > b \cdot c$, где $c > 0$	$9 > 7$; $9 \cdot 2 > 7 \cdot 2$; $18 > 14$;
$a \cdot c < b \cdot c$, где $c < 0$	$9 > 7$; $9 \cdot (-2) < 7 \cdot (-2)$; $-18 < -14$;
$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, где $c > 0$	$9 > 7$; $\frac{9}{2} > \frac{7}{2}$; $4{,}5 > 3{,}5$;
$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, где $c < 0$	$9 > 7$; $-\frac{9}{2} < -\frac{7}{2}$; $-4{,}5 < -3{,}5$.

878. Больше 51 км. **879.** На 20 деталей больше. **881.** 9 см$^2 < S < 19{,}2$ см^2. **890.** Меньше 480 тг. **893.** $44 < x + y < 54$. **901.** По 6 яблок. **902.** $\frac{ab}{2} < 20$ см^2. **903.** Меньше 30 км. **904.** 8.

Дано неравенство $1 < x \leqslant 5$. Изобразите на координатной прямой множество значений x.

Примечание. Крайняя точка, являющаяся решением неравенства, обозначается маленьким кружочком, а крайняя точка, не являющаяся решением неравенства, обозначается маленькой окружностью. Заштрихуйте промежутки между крайними точками. Тогда вы изобразите на координатной прямой решения неравенства $1 < x \leqslant 5$.

Найдите значения x в неравенствах $-2 < x < 4$; $2 \leqslant x \leqslant 6$.

5.3. Числовые промежутки

Отметим на координатной прямой точки, соответствующие числам a и b, из которых b больше a (рис. 5.7).

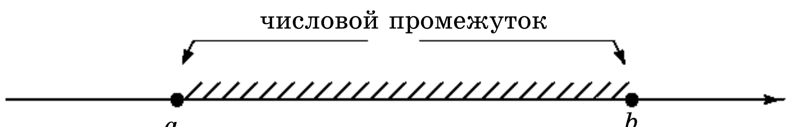


Рис. 5.7

Промежуток между точками на координатной прямой, соответствующий заданным числам a и b, изображает числовой промежуток между числами a и b.

Решения числовых неравенств можно записать числовыми промежутками.

1. Рассмотрим множество решений неравенства $2 < x < 7$ на координатной прямой.

Решениями данного неравенства являются координаты точек, лежащие между точками с координатами 2 и 7 (рис. 5.8).

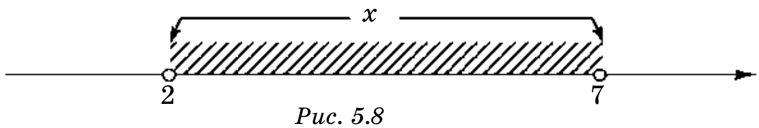


Рис. 5.8

Множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $2 < x < 7$, обозначают: (2; 7) и называют ***интервалом***. Читают: «Промежуток от 2 до 7». Так как неравенство $2 < x < 7$ – двойное строгое, то числа 2 и 7 не включаются во множество решений неравенства. Эти точки на координатной прямой изображаются маленькими окружностями.

2. Рассмотрим множество решений нестрогого двойного неравенства $-4 \leqslant x \leqslant 3$ на числовом промежутке.

На координатной прямой неравенству $-4 \leqslant x \leqslant 3$ соответствуют все точки, лежащие между числами -4 и 3, включая сами эти числа (рис. 5.9).

На координатной прямой точки, включаемые в числовой промежуток, изображаются маленькими кружочками. Такой числовой промежуток, удовлетворяющий условию $-4 \leqslant x \leqslant 3$, называют ***отрезком*** и обозначают: $[-4; 3]$. Читают: «Промежуток от -4 до 3, включая -4 и 3».

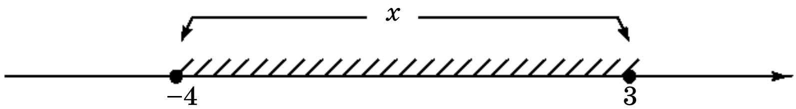


Рис. 5.9

3. Рассмотрим множество решений неравенства $-2 \leqslant x < 4$ на числовом промежутке (рис. 5.10).

Во множество решений неравенства $-2 \leqslant x < 4$ число -2 включается, а число 4 не включается. Числовой промежуток, удовлетворяющий условию $-2 \leqslant x < 4$, называют ***полуинтервалом*** и обозначают: $[-2; 4)$. Читают: «Промежуток от -2 до 4, включая -2».

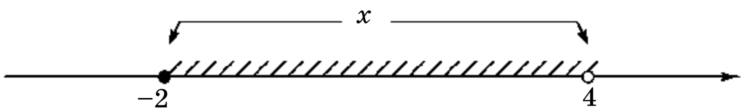


Рис. 5.10

4. Рассмотрим множество решений неравенства $x \geqslant 8$ на числовом промежутке.

Так как неравенство $x \geqslant 8$ нестрогое, то множество его решений на координатной прямой изображается лучом с началом в точке с координатой 8 (рис. 5.11).

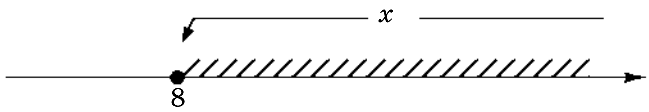


Рис. 5.11

Такой числовой промежуток называют ***лучом*** и обозначают $[8; +\infty)$. Читают: «Промежуток от 8 до плюс бесконечности, включая 8».

5. Рассмотрим множество решений неравенства $x < 5$ на числовом промежутке.

Во множество решений данного неравенства входят числа от минус бесконечности до 5. Число 5 в решение неравенства не включается (рис. 5.12). Такой числовой промежуток, удовлетворяющий условию $x < 5$, называют ***открытым лучом***.

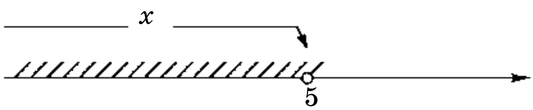


Рис. 5.12

Множество решений данного неравенства на числовом промежутке обозначают $(-\infty; 5)$. Читают: «Промежуток от минус бесконечности до 5».

Термины «интервал», «отрезок», «полуинтервал», «луч», «открытый луч» заменяются их общим названием «числовой промежуток», или «промежуток».

Множество чисел, изображаемых всеми точками координатной прямой, обозначают так: $(-\infty; +\infty)$. Читают: «Промежуток от минус бесконечности до плюс бесконечности». Поэтому *координатную прямую* называют еще и *числовой прямой*.

1. Какие вы знаете числовые промежутки?
2. Какой числовой промежуток называется интервалом?
3. Какой числовой промежуток называется отрезком?
4. Как называется множество решений неравенств $x \leqslant 6$ или $x \geqslant 8$, изображенных на координатной прямой?

905. Прочитайте заданные числовые промежутки:

1) $(7; 15)$; 3) $(6; +\infty)$; 5) $[2; +\infty)$;

2) $[-5; 5]$; 4) $(-\infty; 9)$; 6) $[0; +\infty)$.

A

906. Изобразите на координатной прямой числовые промежутки:

1) $[-3; 5]$; 3) $[-5; 0]$; 5) $(-\infty; -4]$; 7) $(-\infty; 5)$;
2) $(-1; 8]$; 4) $(0; 8)$; 6) $[-9; +\infty)$; 8) $(-5; +\infty)$.

907. Запишите промежутки, изображенные на рисунке 5.13:

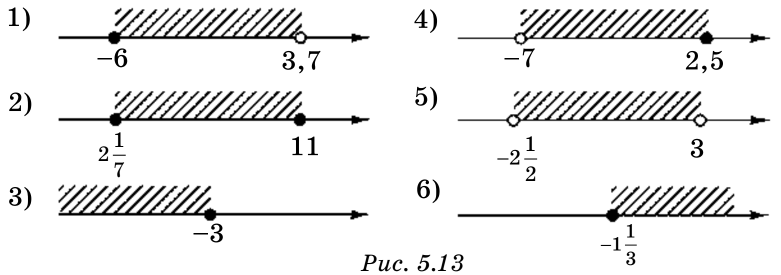


Рис. 5.13

908. Запишите множество чисел, удовлетворяющих неравенству, в виде числового промежутка:

1) $x > 7{,}5$; 3) $m \geqslant -3$; 5) $x < -1$; 7) $m \leqslant 3$;

2) $y < 3$; 4) $m \leqslant 4\frac{1}{5}$; 6) $y > 5$; 8) $m \geqslant -2$.

909. Заполните таблицу, записывая соответствующие названия заданных числовых промежутков (интервал, отрезок, луч, полуинтервал):

Обозначение числового промежутка	$(-\infty; 3]$	$[-3; 2]$	$(-7; 0)$	$[-4; 2)$
Название числового промежутка				

910. Запишите целые числа, принадлежащие числовому промежутку.
1) $(-3; 2)$; 2) $[-5; 1]$; 3) $[-2; 2]$; 4) $[-6; 1]$.

911. Количество мандаринов в первом ящике на 25% больше, чем во втором. Если из первого ящика взять 6 мандаринов, а во второй положить 3 мандарина, то количество мандаринов в обоих ящиках станет равным. Сколько мандаринов было во втором ящике первоначально?

912. Упростите выражение, раскрыв скобки:

1) $\frac{5}{8}x - \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{12}y\right) + \frac{1}{3}y$; 3) $2\frac{1}{6}x - \left(7x - 1\frac{3}{4}y\right) + 2\frac{1}{4}y$;

2) $9,4x+\left(2x-11\frac{3}{4}y\right)-3\frac{5}{9}y$;   4) $3,5x+\left(6\frac{1}{4}x-7y\right)+9y$.

B

913. 1) Какие из чисел -4; -2; -6; 0; 7; 9,3; 8,4 принадлежат, а какие – не принадлежат промежутку $[-3;\ 8,5]$? Выберите и запишите числа, принадлежащие данному промежутку.

2) Из чисел 5; 4,7; $-3,2$; $9\frac{5}{7}$; 0; $-2\frac{5}{6}$; 8; -1; 10 выберите и запишите числа, принадлежащие промежутку $(-\infty;\ 4,8]$.

914. Изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих двойному неравенству. Запишите соответствующие промежутки:

1) $-4,5 \leqslant x \leqslant 2$;   3) $-9\frac{1}{3} < x < 5$;   5) $0 \leqslant x \leqslant 4$;

2) $-8 < y \leqslant 3$;   4) $0,4 \leqslant y < 3$;   6) $-2 < y \leqslant 0$.

915. Найдите наибольшее и наименьшее целые числа, которые принадлежат заданным в таблице промежуткам. Заполните таблицу.

Числовой промежуток	$[-10;\ 8]$	$(-2;\ 8)$	$[-3;\ 3)$	$(-5;\ 4]$
Наибольшее целое число				
Наименьшее целое число				

916. 1) Какому из числовых промежутков $(-4;\ 9)$ или $(4;\ +\infty)$ принадлежит отрезок $[-1;\ 3]$?
2) Какому из числовых промежутков $(-\infty;\ -8)$ или $(-7;\ 7)$ принадлежит отрезок $[-5;\ 5]$?

917. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток:

1) $(-1,5;\ 3,5)$;   2) $\left[-4\frac{1}{3};\ 1\frac{1}{2}\right]$;   3) $[-9;\ -2,5)$;   4) $(-\infty;\ -1)$.

918*. Длина прямоугольника в 1,4 раза больше ширины. Когда его длину уменьшили на 20%, а ширину увеличили на 20%, то периметр уменьшился на 3,2 см. Найдите первоначальную ширину прямоугольника.

C

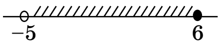
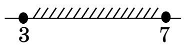
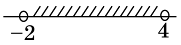
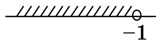
919. 1) Какому из числовых промежутков $[-3; +\infty)$ или $(-\infty; -4]$ принадлежит интервал $(-1; 4)$?
2) Какому из числовых промежутков $[-10; +\infty)$ или $(-\infty; -8]$ принадлежит интервал $(-7; 8)$?

920. Запишите числовым промежутком множество решений двойного неравенства:

$2 \leqslant x \leqslant 8$; $-3 < y < 5$; $9 \leqslant x < 100$; $-1 \leqslant x < 9$;
$-9 < y \leqslant 0$; $-2 < x < 7$; $0 < x \leqslant 9$; $-8 \leqslant x \leqslant 5$.

921. Запишите в виде двойного неравенства, а также с помощью обозначений числового промежутка множество чисел x, изображенных на координатной прямой.

Заполните таблицу

Множество чисел x				
Двойным неравенством				
Числовый промежуток				

922. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток и запишите с помощью неравенства:
1) Луч с началом в точке 3. Сколько таких лучей можно изобразить?
2) Интервал от -5 до 2.
3) Отрезок от -1 до 6.

923. Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют условию.

а) $|x| \leqslant 2$ б) $|x| < 3$;   в) $|x| \leqslant 5$.

Запишите соответствующие промежутки.

924. Решите уравнения:

1) $\dfrac{x-2}{6} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{5x-2}{9}$;   3) $\dfrac{3(x+1)}{8} + \dfrac{2(5-x)}{3} = \dfrac{16-13x}{12}$;

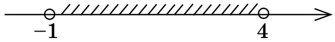
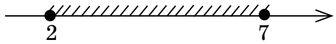
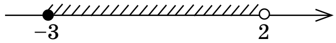
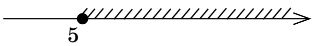
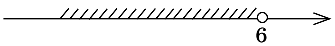
2) $\dfrac{5+2x}{3} = \dfrac{x-3}{5} + \dfrac{x+5}{2}$;   4) $\dfrac{5(7-2x)}{3} - \dfrac{4x-2}{9} = \dfrac{x-19}{2}$.

Ключевые факты.

Числовые промежутки.

Решение числовых неравенств можно записать в виде *числовых промежутков*.

Числовые промежутки (на примерах).

Неравенство	Изображение на координатной прямой	Обозначение	Название
$-1 < x < 4$		$(-1;\ 4)$	интервал
$2 \leqslant x \leqslant 7$		$[2;\ 7]$	отрезок
$-3 \leqslant x < 2$		$[-3;\ 2)$	полуинтервал
$x \geqslant 5$		$[5;\ +\infty)$	луч
$x < 6$		$(-\infty;\ 6)$	открытый луч

911. 36 мандаринов. **918.** 20 см. **923.** 2) а) $[-2;\ 2]$; б) $(-3;\ 3)$. **924.** 1) 1; 2) −7; 3) −3; 4) 5.

5.4. Объединение и пересечение числовых промежутков

I. Объединение числовых промежутков.

Задача. Используя координатную прямую, найдите объединение числовых промежутков $[-2;\ 7]$ и $[4;\ 11]$.

Подсказка.

1. Изобразите на координатной прямой числовые промежутки: $[-2;\ 7]$ и $[4;\ 11]$;

2. Найдите промежуток, состоящий из множества чисел, принадлежащих хотя бы одному из промежутков: $[-2;\ 7]$ или $[4;\ 11]$, т.е. либо промежутку $[-2;\ 7]$, либо промежутку $[4;\ 11]$, либо им обоим. Такой промежуток называется *объединением числовых промежутков* $[-2;\ 7]$ и $[4;\ 11]$.

3. Запишите с обозначением промежуток, являющийся объединением числовых промежутков: $[-2;\ 7]$ и $[4;\ 11]$.

4. Сформулируйте правило объединения числовых промежутков.

Проверьте себя.

1. Изобразим на координатной прямой числовые промежутки: $[-2;\ 7]$ и $[4;\ 11]$ (рис. 5.14).

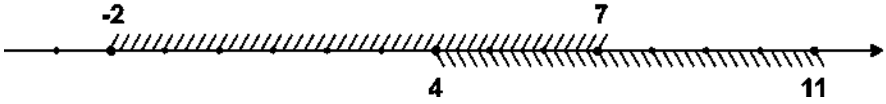


Рис. 5.14

2. Каждое число из промежутка $[-2;\ 11]$ принадлежит хотя бы одному из промежутков: $[-2;\ 7]$ или $[4;\ 11]$.
Промежуток $[-2;\ 11]$ является объединением числовых промежутков $[-2;\ 7]$ и $[4;\ 11]$.
3. Объединение числовых промежутков $[-2;\ 7]$ и $[4;\ 11]$ пишется так:

$$[-2;\ 7] \cup [4;\ 11] = [-2;\ 11].$$

Ответ: $[-2;\ 11]$.

Объединением числовых промежутков *A* и *B* называют новый числовой промежуток $A \cup B$, состоящий из чисел, принадлежащих хотя бы одному из числовых промежутков *A* или *B*.

Объединение промежутков не всегда представляет собой промежуток.

Пример 1. Рассмотрим объединение числовых промежутков $[-6;\ 1]$ и $[4;\ 10]$.

На рисунке 5.15 изображены промежутки $[-6;\ 1]$ и $[4;\ 10]$.

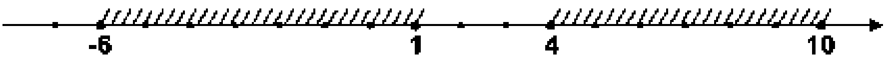


Рис. 5.15

В данном случае объединение промежутков $[-6;\ 1]$ и $[4;\ 10]$ не представляет собой числовой промежуток.

Пишут:

$$[-6;\ 1] \cup [4;\ 10].$$

Ответ: $[-6;\ 1] \cup [4;\ 10]$.

II. Пересечение числовых промежутков.

?

Задача. Используя координатную прямую, найдите пересечение числовых промежутков $(-\infty;\ 3]$ и $[-4;\ +\infty)$.

Подсказка.

1. Изобразите на координатной прямой числовые промежутки: $(-\infty;\ 3]$ и $[-4;\ +\infty)$.

2. Найдите числовой промежуток, состоящий из множества чисел, принадлежащих и промежутку $(-\infty; 3]$, и промежутку $[-4; +\infty)$. Такой промежуток называется *пересечением числовых промежутков* $(-\infty; 3]$ и $[-4; +\infty)$.

3. Запишите пересечение числовых промежутков $(-\infty; 3]$ и $[-4; +\infty)$, в виде нового числового промежутка, используя знак пересечения.

4. Сформулируйте правило пересечения числовых промежутков.

Проверьте себя.

1. Изобразим на координатной прямой числовые промежутки: $(-\infty; 3]$ и $[-4; +\infty)$ (рис. 5.16).

Рис. 5.16

2. Множество чисел промежутка $[-4; 3]$ принадлежит и промежутку $(-\infty; 3]$, и промежутку $[-4; +\infty)$.
Значит, промежуток $[-4; 3]$ является пересечением промежутков $(-\infty; 3]$ и $[-4; +\infty)$.

3. Пересечение числовых промежутков $(-\infty; 3]$ и $[-4; +\infty)$ пишется так:

$$(-\infty; 3] \cap [-4; +\infty) = [-4; 3].$$

Ответ: $[-4; 3]$.

Пересечением числовых промежутков *A* и *B* называют новый числовой промежуток $A \cap B$, содержащий те числа, которые принадлежат и числовому промежутку *A*, и числовому промежутку *B*.

Пример 2. Найдем пересечение числовых промежутков $[-2; 9]$ и $[5; 12]$.

Решение. Изобразим на координатной прямой числовые промежутки $[-2; 9]$ и $[5; 12]$ (рис. 5.17). Числовой промежуток $[5; 9]$ принадлежит и промежутку $[-2; 9]$, и промежутку $[5; 12]$.

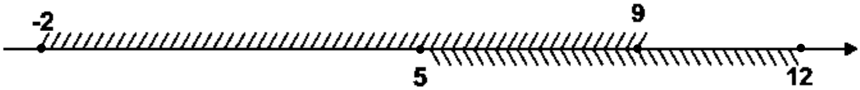


Рис. 5.17

Значит, пересечением промежутков $[-2; 9]$ и $[5; 12]$ служит промежуток $[5; 9]$. Запишем:

$$[-2; 9] \cap [5; 12] = [5; 9].$$

Ответ: $[5; 9]$.

Пример 3. Найдем пересечение числовых промежутков $(-\infty; -4)$ и $(2; +\infty)$.

Решение. Изобразим на координатной прямой числовые промежутки $(-\infty; -4)$ и $(2; +\infty)$ (рис. 5.18).

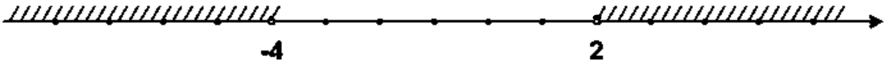


Рис. 5.18

Из рисунка видно, что промежутки $(-\infty; -4)$ и $(2; +\infty)$ не имеют общих чисел. Значит, пересечением числовых промежутков $(-\infty; -4)$ и $(2; +\infty)$ является пустое множество.

Пишут:

$$(-\infty; -4) \cap (2; +\infty) = \varnothing.$$

Ответ: $\varnothing$.

Пример 4. Найдем пересечение числовых промежутков:

$$(-\infty; 7] \text{ и } [7; 12).$$

В данном случае пересечение числовых промежутков состоит из одного числа 7.

$$(-\infty; 7] \cap [7; 12) = \{7\}.$$

Чтобы найти объединение (пересечение) числовых промежутков, надо:

1. Изобразить на координатной прямой данные числовые промежутки.
2. Найти промежуток, состоящий из множества чисел, которые принадлежат хотя бы одному из данных числовых промежутков (всем числовым промежуткам).
3. Записать объединение (пересечение) с помощью числового промежутка.

1. Какой числовой промежуток называется объединением числовых промежутков?
2. Какой числовой промежуток называется пересечением числовых промежутков?
3. В каком случае пересечение числовых промежутков является пустым множеством?

925. Какое наибольшее целое число принадлежит промежутку:
1) $[-8; 3]$; 2) $(-7; 0)$; 3) $(-\infty; -4]$; 4) $[-1; 19]$?

А

926. На рисунке 5.19 изображены числовые промежутки. Запишите их пересечение:

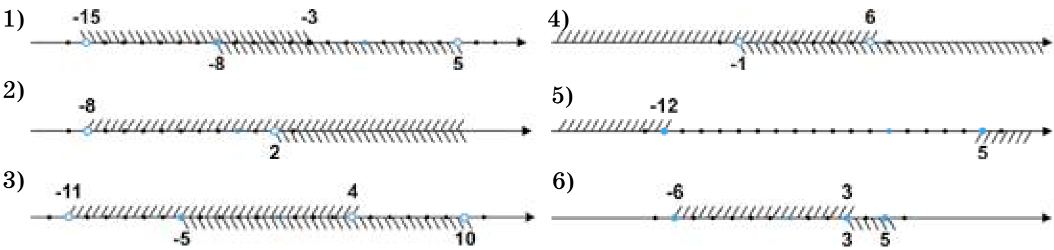


Рис. 5.19

927. Используя координатную прямую, найдите объединение числовых промежутков:

1) $(-12; 8]$ и $[5; 11)$;
2) $(-\infty; -3)$ и $[-5; 4)$;
3) $[2; +\infty)$ и $(7; +\infty)$;
4) $(-2; 3]$ и $[6; 10)$;
5) $[-7; -1]$ и $[-3; 7]$;
6) $(-\infty; 1)$ и $(-4; 10)$.

928. Запишите наибольшее и наименьшее целое число, принадлежащие промежутку:

1) $[-13; 4] \cup (-1; 15)$; 2) $(-9; 5] \cap [-4; 12)$.

B

929. Запишите все целые числа, принадлежащие пересечению числовых промежутков:

1) $(-6; 2]$ и $(-3; 7]$;
2) $(-7; 7)$ и $[-2; 3)$.

930. На рисунке 5.20 изображены числовые промежутки. Запишите их объединение.

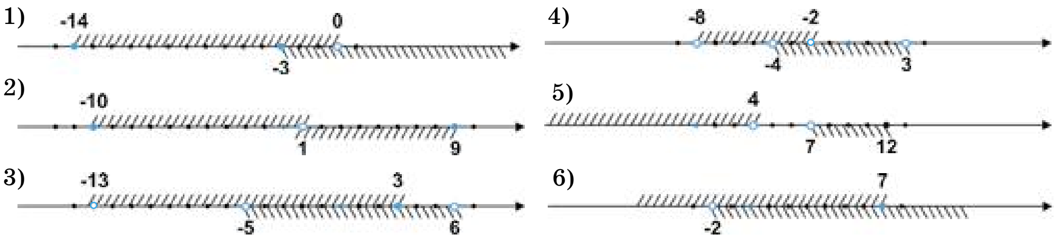


Рис. 5.20

931. Даны числовые промежутки:

1) $(-8; 6]$ и $[-5; 8)$;
2) $(-\infty; 0]$ и $[-9; 3)$;
3) $(-\infty; -2]$ и $[-2; 7]$;
4) $(-4; 2)$ и $(-7; -1)$;
5) $[-9; 9]$ и $[-1; 14]$;
6) $(-6; 6)$ и $[-4; 4]$.

• Изобразите заданные числовые промежутки на координатной прямой.
• Запишите пересечение промежутков.
• Укажите наибольшее целое число, принадлежащее пересечению промежутков.

932. Даны числовые промежутки:

1) $[-8; 2]$ и $[1; 9)$;
2) $(-6; 7)$ и $(-2; 4)$;
3) $(-9{,}3; 1)$ и $(5; +\infty)$;
4) $(-11; 3]$ и $[-2; 7)$;
5) $[-7{,}5; -3]$ и $[0; 4]$;
6) $(-5; 0)$ и $(-1; 6)$.

• Изобразите заданные числовые промежутки на координатной прямой.
• Запишите объединение промежутков.

• Укажите наименьшее целое число, принадлежащее объединению промежутков.

933. Используя координатную прямую, найдите пересечение и объединение числовых промежутков. Заполните таблицу:

Числовые промежутки	[−3; 5] и [−1; 9]	(−5; 7] и [7; 12)	(−4; 8] и [0; 10)	(−7; 3] и [6; 15)
Пересечение числовых промежутков				
Объединение числовых промежутков				

C

934. Используя координатную прямую, найдите пересечение числовых промежутков:
1) (−7; 5], (−4; +∞) и [−1; 9);
2) (−∞; −6], [−6; +∞) и (−6; 1);
3) (−8; 7), (−5; 10) и [−3; 2];
4) (−∞; 5], (−4; +∞) и [−2; 9].

935. Используя координатную прямую, найдите объединение числовых промежутков:
1) (− ∞; 5], (−2; +∞) и [0; 8];
2) (−7; 5), (−1; 9) и (7; 12);
3) [−3; 1), [1; 5) и [5; 8];
4) (−8; −3), (−5; 2) и (0; 10).

936. 1) Составьте интервал (3; 7), полученный в результате пересечения двух открытых лучей.
2) Составьте отрезок [−2; 5], полученный в результате пересечения двух лучей.

937. Вычислите:

$$\frac{\left(3-2\frac{5}{9}\right):\frac{1}{12}}{\left(1,35-\frac{4}{15}\right)\cdot\frac{3}{13}+2\frac{5}{12}}+\frac{\left(\frac{7}{18}+\frac{5}{12}-\frac{2}{3}\right)\cdot 0,9}{0,1:\left(2\frac{1}{15}+\frac{1}{3}\right)}.$$

Ключевые факты.

Объединение и пересечение числовых промежутков.
I. Объединение числовых промежутков.

Множество чисел, принадлежащих хотя бы одному из данных числовых промежутков *A* и *B*, называют объединением этих числовых промежутков.

Пример 1.

$$[-5;\ 9] \cup [-2;\ 14] = [-5;\ 14],$$

где числовой промежуток $[-5;\ 14]$ является объединением числовых промежутков $[-5;\ 9]$ и $[-2;\ 14]$.

II. Пересечение числовых промежутков.

Множество чисел, составляющее общую часть некоторых числовых промежутков *A* и *B*, называют пересечением этих числовых промежутков.

Пример 2.

$$[-3;\ 10] \cap [-1;\ 15] = [-1;\ 10],$$

где числовой промежуток $[-1;\ 10]$ является пересечением числовых промежутков $[-3;\ 10]$ и $[-1;\ 15]$.

926. 3) $[-5; 4)$; 5) $\varnothing$; 6) $\{3\}$. **927.** 2) $(-\infty; 4)$; 3) $[2; +\infty)$; 4) $(-2; 3] \cup [6; 10)$. **930.** 4) $(-8; 3)$; 6) $(-\infty; +\infty)$; **931.** 1) $[-5; 6]$; число 6; 2) $[-9; 0]$; число 0. 3) $\{-2\}$. **934.** 1) $[-1; 5]$; 4) $[-2; 5]$. **935.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 3) $[-3; 8]$. **937.** 5.

Научитесь решать неравенства:

1) $4x - 5 < 3x + 1$.
Ответ: $x < 6$;

2) $3x + 7 > x + 15$.
Ответ: $x > 4$.

Образец. $4x+\underset{-3}{3}>\overset{-x}{x}+18$.

$4x - x > 18 - 3$, $3x > 15$, $x > 5$.
Ответ: $x > 5$, или $(5; +\infty)$.

5.5. Линейное неравенство с одной переменной. Равносильные неравенства. Решение линейных неравенств с одной переменной

I. Линейное неравенство с одной переменной.
Неравенства

$$ax > b \text{ и } ax < b \text{ (или соответственно } ax \geqslant b \text{ и } ax \leqslant b),$$

где a и b – некоторые числа, а x – переменная, называют *линейными неравенствами с одной переменной*.

Например,

$5x - 2 < 8$; $x - 5 > 0$; $3x + 5 > 21 - x$; $\frac{x+4}{2} < \frac{x+7}{3}$ – линейные неравенства с одной переменной.

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти множество его решений или доказать, что их нет.

II. Равносильные неравенства.

Неравенства, имеющие одни и те же решения, называются равносильными.

Неравенства, не имеющие решений, также считаются равносильными.

При решении неравенств используются преобразования, заменяющие данное неравенство на равносильное ему.

Такую замену называют *равносильным преобразованием* неравенства.

Правила равносильных преобразований неравенств

1. **Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное данному.**

Пример 1. Неравенства $3x - 7 < x + 3$ и $3x - x < 3 + 7$ равносильны.

2. **Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному.**

Пример 2. Неравенства $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} > \frac{5}{6}$ и $12\left(\frac{x}{4} + \frac{x}{3}\right) > \frac{5}{6} \cdot 12$ равносильны.

3. **Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.**

Пример 3. Неравенства $-4x < 12$ и $x > -3$ равносильны.

III. Решение линейных неравенств с одной переменной.

?

Задача. Решим неравенство $5x - 1 \geqslant 3x + 7$.

Подсказка.

1. Перенесем с противоположными знаками слагаемые, содержащие x, в левую часть, а числа – в правую.

2. Приведем подобные слагаемые.

3. Разделим обе части неравенства на коэффициент при переменной x (если он не равен нулю).

Ответ запишем в виде числового промежутка или в виде неравенства, задающего этот промежуток.

4. Вывод.

Какому числовому промежутку принадлежит множество решений неравенства $ax \geqslant b$, если $a > 0$?

Проверьте себя.

Решение.

1. $5x - 1 \geqslant 3x + 7$,
   $5x - 3x \geqslant 7 + 1$,
2. $2x \geqslant 8$,
3. $x \geqslant 4$.

Множество решений данного неравенства – это числовой промежуток (рис. 5.21) $[4; +\infty)$.

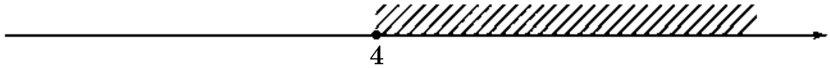


Рис. 5.21

Ответ: $[4; +\infty)$ или $x \geqslant 4$.

4. Вывод.

Если $a > 0$, то неравенство $ax \geqslant b$ равносильно неравенству $x \geqslant \frac{b}{a}$. Значит, множество решений данного неравенства есть числовой промежуток: $\left[\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Если $a < 0$, то неравенство $ax > b$ равносильно неравенству $x < \frac{b}{a}$. Значит, множество решений неравенства есть числовой промежуток $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$.

Пример 4. $\frac{x}{2} - \frac{5x}{3} > 7$, обе части данного неравенства умножим на 6, так как НОК (2; 3) = 6. Получим $6 \cdot \frac{x}{2} - \frac{5x}{3} \cdot 6 > 7 \cdot 6$,

$$3x - 10x > 42,$$
$$-7x > 42,$$
$$x < -6.$$

Множеством решений неравенства $\dfrac{x}{2} - \dfrac{5x}{3} > 7$ является числовой промежуток $(-\infty\,;\,-6)$ (рис. 5.22).

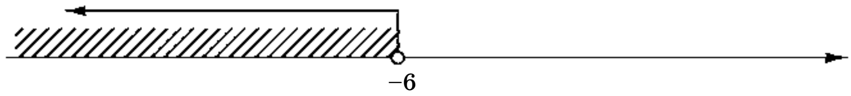


Рис. 5.22

О т в е т: $(-\infty\,;\,-6)$.

Если $a = 0$ и $b > 0$, то неравенство $0x > b$ не имеет решений, так как при любом значении x оно обращается в неверное числовое равенство.

Пример 5. $7(x + 1) - 4x > 3x + 16,$

$7x + 7 - 4x > 3x + 16,$

$3x - 3x > 16 - 7,$

$0x > 9$. Решений нет.

О т в е т: $\varnothing$.

Если $a = 0$ и $b < 0$, то неравенство $0x > b$ будет верным при любом значении x. Множеством решений заданного неравенства $0x > b$ является числовой промежуток $(-\infty\,;\,+\infty)$.

П р и м е р 6. $6x + 17 > 2(3x + 4),$

$6x + 17 > 6x + 8,$

$6x - 6x > 8 - 17,$

$0x > -9.$

О т в е т: $(-\infty\,;\,+\infty)$.

1. Какое неравенство называется линейным неравенством с одной переменной? Приведите примеры.
2. Что называется решением линейного неравенства?
3. Какие неравенства называются равносильными неравенствами?

938. Решите неравенства (устно):

1) $3x > 15$; 3) $4x > 16$; 5) $7x > 3{,}5$;

2) $2x < 1$; 4) $5x < 20$; 6) $6x < 3$.

А

939. 1) Являются ли решениями неравенства $9 - 2x > 12$ значения x, равные -3; $-1{,}5$; 2?

2) Являются ли решениями неравенства $3x - 5 < 7$ значения x, равные 1; 8; 4; 3?

940. Решите неравенство. Решение запишите в виде числового промежутка:

1) $3x \geqslant -18$; 3) $5y \geqslant 16$; 5) $-8x \geqslant 24$;

2) $-8x \leqslant 32$; 4) $6,5y > 13$; 6) $7,5x \leqslant 30$.

941. Решите неравенство:

1) $x - 3 \leqslant 11$; 3) $x + 5 > -3$; 5) $11 \geqslant x + 2$;

2) $-3 < y - 4$; 4) $2y \leqslant y + 8$; 6) $3y > 5y + 4$.

942. Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

1) $x - 3 \geqslant -13$; 3) $x + 3 > 5$; 5) $4x + 5 \leqslant 21$;

2) $x + 1 \leqslant 9$; 4) $2x + 7 < 11$; 6) $9x - 7 > -25$.

943. Решите неравенство:

1) $3x - 7 < x + 1$; 3) $1 - x \leqslant 2x - 5$; 5) $4x + 2 > 3x + 1$;

2) $2 + x > 8 - x$; 4) $2x + 1 > x + 6$; 6) $6x + 1 < 2x + 9$.

944. 1) При каких значениях x выражения:
$2x - 5$; $1,4x - 7$; $6 - x$ принимают отрицательные значения?
2) При каких значениях y выражения:
$1 - y$; $y + 8$; $3y - 4,5$ принимают положительные значения?

Решите задачи с помощью неравенств **(945–947).**

945. Периметр квадрата больше 20 см, но меньше 28 см. Оцените длину стороны квадрата.

946. Айман купила 2 тетради и ручку по 50 тг. За все заплатила меньше 170 тг. Оцените цену тетради.

947. Из одного города в другой, расстояние между которыми меньше 300 км, выехал поезд. Через 3 ч ему осталось проехать еще 45 км. Оцените скорость поезда.

948. Из 9 одинаковых по виду монет одна монета по весу несколько отличается от других. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить легче или тяжелее эта монета, чем остальные?

949. Решите уравнение:

Е. $\dfrac{10}{x-4} = 2$; Т. $\dfrac{6-5y}{2} = -4,5$; В. $\dfrac{2y+1}{3} = 5$; И. $\dfrac{6,2}{3y+1} = 2$.

7	0,7	9	3

Впишите в таблицу в один столбик с корнями уравнений букву, стоящую рядом с соответствующим уравнением. И тогда вы узнаете имя французского математика, который ввел математические символы и обозначение чисел буквами.

B

950. 1) При каких значениях x разность $7{,}6 + 2x - (3x - 6{,}4)$ будет положительным числом?
2) При каких значениях y сумма $y + 2{,}8 + (9{,}8 - 3y)$ будет отрицательным числом?

Решите неравенства **(951, 952).**

951. 1) $5y + 9 \leqslant 3 - 7y$;
2) $3x + 1 \leqslant 4x - 5$;
3) $\frac{1}{4} - \frac{y}{3} \geqslant \frac{1}{3} - y$;
4) $6 - 5y > 3y - 2$;
5) $3 - 7y > 5y - 3$;
6) $\frac{x}{6} + \frac{1}{2} > x - \frac{1}{3}$.

952. 1) $3 - 2(u - 1) > 8 + u$;
2) $5(u + 2) + 14 < 6 - u$;
3) $\frac{1}{4}(3 + 8u) \geqslant 6{,}25 + u$;
4) $4(u + 3) < 3(u + 2)$;
5) $3(2u + 1) \geqslant 5(u - 1)$;
6) $\frac{3}{5}\left(5u - \frac{2}{3}\right) < u + 7{,}6$.

953. При каких значениях x:
1) дробь правильная:

$\frac{9 + 2x}{5}$; $\frac{10 - 3x}{4}$; $\frac{5x - 13}{7}$; $\frac{2x + 5}{3}$?

2) дробь неправильная:

$\frac{2 - x}{3}$; $\frac{3x + 7}{10}$; $\frac{5 - 2x}{9}$; $\frac{7x - 8}{6}$?

954. Решите неравенства:
1) $2(3x + 1) - x \leqslant 3(x + 4)$;
2) $7x + 4(x - 2) > 6(1 + 3x)$;
3) $2(x - 1) - 3(x + 2) < 6(1 + x)$;
4) $7(y + 3) - 2(y + 2) \geqslant 2(5y + 1)$;

5) $6(3+5y)-(2+7y)\leqslant 5(4+3y)$; 6) $4(3y-1)-3(y-1)>2(3+y)$.

Решите задачу, составив неравенство **(955–958).**

955. Длина прямоугольника 11 см. Оцените, сколько сантиметров должна быть его ширина, чтобы периметр этого прямоугольника был меньше периметра квадрата со стороной 8 см.

956. От причала A до причала B и обратно туристы плыли по реке на лодке. На весь путь они затратили меньше 3 ч 30 мин. Скорость лодки в стоячей воде 5 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч. Оцените расстояние от причала A до причала B.

957. Первым трактористом было распахано 90 га земли, а вторым – 80 га. Первый тракторист распахивал в день по 4 га, а второй – по 6 га. Оцените, через сколько дней площадь земли, распаханная вторым трактористом, оказалась больше площади земли, распаханной первым?

958. Портниха для пошива 8 рубашек и нескольких платьев купила 51 м ткани. На пошив одной рубашки она израсходовала 2 м, а на пошив одного платья – не меньше 2,5 м ткани. Оцените, сколько платьев она сможет сшить из оставшейся ткани.

959. Вычислите рациональным способом:

1) $\dfrac{7,2\cdot(-3,8)\cdot(-0,04)}{0,8\cdot(-0,19)\cdot(-3,6)}$; 2) $\dfrac{\left(3\dfrac{1}{8}-7\dfrac{5}{6}\right):\left(-4\dfrac{17}{24}\right)\cdot(-1,8)}{0,3\cdot\left(5\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{6}{23}-4\right):\left(-1\dfrac{1}{3}\right)}$.

C

Решите неравенства **(960–962).**

960. 1) $7\leqslant 2x+3\leqslant 11$; 3) $-2<\dfrac{8+x}{7}<4$;

2) $-3<1+2x\leqslant 7$; 4) $-7\leqslant\dfrac{2x+1}{2}<2$.

961. 1) $9-\dfrac{5x+1}{2}>x+5$; 3) $\dfrac{4+y}{2}-\dfrac{y+2}{7}<y+3$;

2) $1,75+\dfrac{2x}{3}<x+1\dfrac{2}{3}$; 4) $4+\dfrac{7y-3}{5}>\dfrac{3y+5}{4}-\dfrac{3y}{2}$.

962. 1) $\frac{7x+2}{6}-x\leqslant\frac{5x+4}{3}-4x$; 3) $\frac{9-5x}{2}-\frac{4x}{3}<x-\frac{3x-1}{6}$;

2) $\frac{4x+1}{3}-x>\frac{x+1}{2}-\frac{x-3}{4}$; 4) $\frac{5x-3}{4}-\frac{11x}{6}\geqslant\frac{2(1-x)}{3}+\frac{3x}{2}$.

Решите задачу, составив неравенство **(963–965).**

963. Стрелок стреляет в мишень 15 раз. Если за каждое точное попадание он получает 6 очков, то при каждом промахе он теряет 2 очка. Оцените, сколько точных попаданий в мишень должен сделать стрелок, чтобы в конце игры получить больше 34 очков.

964. Расстояние между станциями Луговая и Шу 110 км. Со станции Луговая выехал велосипедист со скоростью 14 км/ч, а со станции Шу ему навстречу выехал мотоциклист. Оцените, с какой скоростью должен ехать мотоциклист, чтобы они могли встретиться менее, чем через 2,5 ч?

965. Расстояние между причалами A и B не меньше 56 км. Туристы проплыли на моторной лодке от причала A до B и обратно за 3 ч 45 мин. Собственная скорость лодки 30 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч. Оцените, за какое время туристы проплыли на моторной лодке по течению от причала A до причала B.

966. Вычислите:

$$\frac{\left(2\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\right)\cdot\frac{4}{9}}{\left(8\frac{1}{6}-3\frac{1}{2}\right):1\frac{1}{6}}+\frac{\left(4{,}8-1\frac{2}{5}\right):0{,}68}{29:\left(2\frac{1}{2}+1\frac{1}{8}\right)}.$$

Ключевые факты.

I. Линейное неравенство с одной переменной.

Неравенства вида $ax>b$ и $ax<b$ или $ax\geqslant b$ и $ax\leqslant b$ называют линейными неравенствами с одной переменной, где a и b – некоторые числа.

Пример 1. Линейные неравенства с одной переменной:

$$2(x+3)>9;\qquad 4x-5\leqslant x+1;\qquad 7x>4x+15.$$

II. Равносильные неравенства.

Неравенства, множества решений которых совпадают, называются равносильными. В частности, неравенства равносильны, если оба не имеют решений.

Пример 2. Неравенства $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} < 2$ и $4x - 3x < 24$ равносильны.

III. Решение линейных неравенств с одной переменной.

Пример 3. Решим неравенство:

$4(x - 3) + 5x \geqslant 3x$.

$4x - 12 + 5x \geqslant 3x$ – раскрытие скобок;

$4x + 5x - 3x \geqslant 12$ – перенесение слагаемых, содержащих неизвестную, в левую часть, а числа – в правую.

$6x \geqslant 12$ – приведение подобных слагаемых.

$x \geqslant 2$ – деление обеих частей неравенства на коэффициент при неизвестной.

Ответ: $[2; +\infty)$, или $x \geqslant 2$.

947. Скорость поезда меньше 85 км/ч. **950.** 1) $x < 14$; 2) $y > 6{,}3$. **951.** 1) $(-\infty; -0{,}5]$; 2) $[6; +\infty)$; 3) $\left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$. 4) $(-\infty; 1)$; 5) $(-\infty; 0{,}5)$; 6) $(-\infty; 1)$. **952.** 1) $(-\infty; -1)$; 2) $(-\infty; -3)$; 3) $[5{,}5; +\infty)$. 4) $(-\infty; -6)$; 5) $[-8; +\infty)$; 6) $(-\infty; 4)$. **954.** 1) $(-\infty; 5]$; 2) $(-\infty; -2)$; 3) $(-2; +\infty)$. 4) $(-\infty; 3]$; 5) $(-\infty; 0{,}5]$; 6) $(1; +\infty)$. **955.** Меньше 5 см. **956.** Меньше 7,35 км. **957.** Через 5 дней. **958.** Не больше 14 платьев. **959.** 1) 2; 2) −3. **960.** 1) $[2; 4]$; 2) $(-2; 3]$; 3) $(-22; 20)$; 4) $[-7{,}5; 1{,}5)$. **961.** 1) $(-\infty; 1)$; 2) $(0{,}25; +\infty)$; 3) $(-2; +\infty)$; 4) $(-1; +\infty)$. **962.** 1) $(-\infty; 0{,}4]$; 2) $(11; +\infty)$; 3) $(1; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1]$. **963.** Больше 8 раз. **964.** Больше 30 км/ч. **965.** Не меньше 1 ч 45 мин. **966.** 1.

Чтобы оценить значение неизвестной, надо составить неравенство или систему неравенств и найти множество его решений.

Задача. Ученик задумал целое число. Если к задуманному числу прибавить его $\frac{1}{4}$ часть, то получится число, которое больше 10. Если задуманное число уменьшить на его $\frac{1}{2}$ часть, то получится число, которое меньше 5. Какое число задумал ученик?

Ответ: $8 < x < 10$.

5.6. Решение системы линейных неравенств с одной переменной

Если даны два или несколько неравенств и ставится задача найти множество общих решений, то их нужно объединить в одну систему неравенств.

Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобкой.

Например, запись $\begin{cases}2x+1>5,\\x-3<2.\end{cases}$ означает, что неравенства $2x + 1 > 5$ и $x - 3 < 2$ образуют систему.

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

Решить систему неравенств – значит найти множество ее решений или доказать, что решений нет.

Чтобы найти решения системы линейных неравенств с одной переменной, надо:

1) найти множество решений каждого неравенства системы;

2) изобразить на координатной прямой множество решений каждого из неравенств;

3) найти на координатной прямой пересечение множеств решений неравенств или доказать, что система не имеет решений, то есть пересечением является пустое множество.

Множеством решений системы является пересечение множеств решений неравенств, входящих в эту систему.

Решение системы можно записать в виде неравенства или в виде числового промежутка.

Решим систему линейных неравенств с одной переменной.

Пример 1. Ученик заплатил более 200 тг за 4 тетради. Если тетрадь подорожает на 20 тенге, то он заплатит меньше 360 тг. Какой может быть цена тетради?

Решение. Пусть x тг – первоначальная цена тетради. По условию задачи: $\begin{cases}4x>200,\\4(x+20)<360;\end{cases}$ составили систему линейных неравенств с одной переменной.

Таким образом, решение задачи сводится к решению системы неравенств: $\begin{cases}4x>200,\\4(x+20)<360.\end{cases}$ Заменяя последовательно каждое неравенство равносильным ему неравенством, получим:

$$\begin{cases}x>50,\\x+20<90;\end{cases}\quad\begin{cases}x>50,\\x<70.\end{cases}$$

Изобразим на координатной прямой множество решений каждого из неравенств: $x > 50$ и $x < 70$ (рис. 5.23).

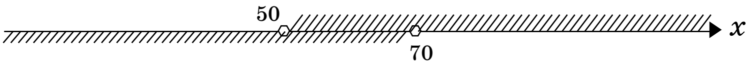


Рис. 5.23

С помощью координатной прямой найдем пересечение числовых промежутков, соответствующих неравенствам $x > 50$ и $x < 70$.

$$(50; +\infty) \cap (-\infty; 70) = (50; 70)$$

На рис. 5.23 мы видим, что оба неравенства верны при $50 < x < 70$. Значит, решением системы неравенств является промежуток (50; 70). Ответ можно записать в виде промежутка (50; 70) или в виде двойного неравенства $50 < x < 70$, задающего этот промежуток.

О т в е т: Цена тетради больше 50 тг, но меньше 70 тг.

Пример 2. Решим систему линейных неравенств $\begin{cases} 9x - 5 \geqslant 13, \\ 6x - 7 \geqslant 23. \end{cases}$

Переходя от каждого неравенства системы к равносильному ему неравенству, получим:

$$\begin{cases} 9x \geqslant 18, \\ 6x \geqslant 30; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \geqslant 5. \end{cases}$$

Изобразим на координатной прямой множество решений каждого из неравенств (рис. 5.24).

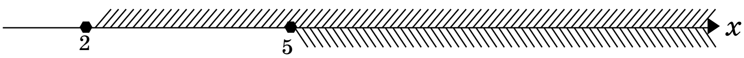


Рис. 5.24

Оба неравенства верны при $x \geqslant 5$. Ответ можно записать в виде неравенства $x \geqslant 5$ или в виде числового промежутка $[5; +\infty)$, задаваемого этим неравенством.

О т в е т: $[5; +\infty)$.

Пример 3. Решим систему линейных неравенств $\begin{cases} 3x + 2 \leqslant 14, \\ 4x - 3 > 21. \end{cases}$

Выполнив преобразования каждого из неравенств системы, получим:

$$\begin{cases} 3x \leqslant 12, \\ 4x > 24; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leqslant 4, \\ x > 6. \end{cases}$$

Изобразим решения системы: $x \leqslant 4$ и $x > 6$ на координатной прямой (рис. 5.25):

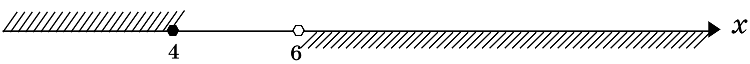


Рис. 5.25

Система не имеет решений, так как не существует значений x, удовлетворяющих обоим условиям: $x \leqslant 4$ и $x > 6$. Значит, заданная система неравенств не имеет решений. Следовательно, множеством решений системы является пустое множество.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 4. Решим двойное неравенство $17 < 4x - 3 < 33$.

Двойное неравенство $17 < 4x - 3 < 33$ представляет собой другую запись системы неравенств:

$$\begin{cases} 4x - 3 > 17, \\ 4x - 3 < 33. \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} 4x > 20, \\ 4x < 36; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 5, \\ x < 9. \end{cases}$$

Решение можно записать в виде цепочки двойных неравенств:

$$17 < 4x - 3 < 33,$$
$$17 + 3 < 4x < 33 + 3,$$
$$20 < 4x < 36,$$
$$5 < x < 9.$$

Множеством решений системы неравенств является промежуток $(5; 9)$, или $5 < x < 9$.

Ответ: $(5; 9)$.

1. Какие неравенства образуют систему неравенств?
2. Что называется решением системы линейных неравенств с одной переменной?
3. Как найти решение системы линейных неравенств с одной переменной?

967. Является ли число 2 решением системы неравенств (устно):

1) $\begin{cases} 3x + 4 \leqslant 13, \\ x - 1 > -5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 4 < 0, \\ 2x - 3 > 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x - 3 \geqslant 5, \\ x - 7 < 0? \end{cases}$

A

968. Напишите решение системы неравенств в виде числового промежутка и изобразите его на координатной прямой:

1) $\begin{cases} x \geqslant 7, \\ x \leqslant 10; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 4, \\ x < 7; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x < -4, \\ x > 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x > 3, \\ x < 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x > -1, \\ x \geqslant 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x > -5. \end{cases}$

Решите системы неравенств **(969, 970)**:

969. 1) $\begin{cases} 2x+7\geqslant 1, \\ x-3<1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x+9>-15, \\ 2-x\leqslant 5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 7x+9<2x-1, \\ 4+11x>9x-14; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3y<21, \\ 4-y>0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x+3\geqslant x-1, \\ 5x-22\leqslant x+2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ x-5>2x+1. \end{cases}$

970. 1) $\begin{cases} 3(x-1)<x-3, \\ 5(x+3)>2x+3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3(2y-3)\leqslant y+6, \\ 4(3y+1)\geqslant 5y-10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2(y-2)\geqslant 3y+1, \\ 5(y+1)\leqslant 4y+3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2(3x+2)>5(x-1), \\ 7(x+2)<3(2x+3). \end{cases}$

971. Решите двойные неравенства:
1) $-2 < 3x + 1 < 7$; 3) $3 < 7 - 4x < 15$;
2) $2 < 5x - 3 < 17$; 4) $-12 < 2(x + 3) < 4$.

972. Ширина прямоугольника равна 5 см, его периметр меньше 26 см. Оцените длину прямоугольника.

973. Если к заданному числу прибавить его $\frac{1}{3}$ часть, то получится число, которое меньше 36. Если данное число уменьшить на его $\frac{1}{2}$ часть, то получится число, которое больше 11. Оцените заданное число.

974. Выполните действия:
1) $4{,}86 : (-1{,}8) - 0{,}8 \cdot 2{,}3 + 6$; 3) $3{,}04 : (-1{,}6) + 16{,}16 : 16 + 7$;
2) $13{,}44 : (0{,}65 - 0{,}23 \cdot 15)$; 4) $(99{,}99 - 6{,}54) : (-62{,}3) \cdot (-0{,}3)$.

B

Решите системы неравенств **(975–977)**.

975. 1) $\begin{cases} x>1, \\ x>2{,}5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<-1{,}5, \\ x>-2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 0{,}6x\leqslant 9, \\ \frac{1}{3}x\geqslant 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2x\leqslant -3, \\ x\leqslant 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4-5x>-1, \\ \frac{1}{6}x<2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 9x>0, \\ \frac{1}{7}x\geqslant -1. \end{cases}$

976. 1) $\begin{cases} 7+2x>5+x, \\ 3x+2<8+x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 0,4x-1<0,5x-1,7, \\ 2,7x-10<0,9x-1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1-0,5x<4-x, \\ 9-2,8x>6-1,3x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2,8x-17\geqslant 0,3x-4,5, \\ 12,3x-16,6\leqslant 7,1x+19,8. \end{cases}$

977. 1) $\begin{cases} \frac{x}{6}+\frac{x}{3}<2, \\ 2-\frac{1}{3}x>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-\frac{x+3}{2}\geqslant 1, \\ -\frac{x}{2}\leqslant 2-\frac{x}{3}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{x}{4}<\frac{x}{6}-1, \\ 6-\frac{x}{2}>\frac{x}{4}+3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x}{5}-\frac{2}{3}<\frac{2}{5}-\frac{x}{3}, \\ \frac{2}{7}+\frac{x}{3}>\frac{x}{7}-\frac{2}{3}. \end{cases}$

978. Сумма заданного первого нечетного числа и следующего за ним второго нечетного числа меньше 36. Сумма второго нечетного числа и удвоенного следующего за ним третьего нечетного числа больше 49. Оцените заданное первое нечетное число.

979. Количество яблок, собранных Антоном в саду, больше 15, но меньше 21. Сколько одноклассников он может угостить, если каждому даст по 3 яблока?

980. Вычислите рациональным способом:

1) $\dfrac{\frac{3}{8}+\frac{7}{12}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{5}{8}+\frac{1}{6}}$; 2) $\dfrac{\frac{5}{9}-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{2}-\frac{2}{9}}$; 3) $\dfrac{\frac{7}{12}-\frac{2}{15}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{30}-\frac{2}{15}}$.

C

Решите системы неравенств **(981–986)**.

981. 1) $\begin{cases} \frac{0,6x+6}{3}-\frac{0,2x+1}{2}>1, \\ \frac{4-3x}{2}>5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{0,2x-1}{7}-\frac{0,3x}{2}\leqslant 0,1, \\ \frac{x+1}{3}-1\leqslant\frac{x}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{0,8x-1}{5}-\frac{1}{2}x\leqslant 0,48, \\ \frac{x-5}{3}-1\leqslant\frac{x}{6}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1,4-x}{5}-\frac{0,6x}{3}<2,28, \\ \frac{2x-1}{7}-1>\frac{x}{3}. \end{cases}$

982. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{4}(x-2) > x-\dfrac{x-1}{2}, \\ \dfrac{0,7x-8,7}{3}-\dfrac{5}{6} < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-\dfrac{x+5}{3}-\dfrac{x-1}{6} > \dfrac{3x+2}{8}, \\ \dfrac{3+x}{4} > \dfrac{x-0,2}{2}-\dfrac{x}{5}. \end{cases}$

983. Найдите решения двойных неравенств:

1) $1 \leqslant \dfrac{5+x}{2} < 2,5;$ 3) $2,15 < \dfrac{3x-1}{4} < 2,6;$

2) $0 < \dfrac{2x+3}{5} < 1;$ 4) $-1 < \dfrac{3x-1}{4} < 2.$

984. Из двух городов, расстояние между которыми 288 км, одновременно навстречу друг другу выехали грузовая и легковая машины. Скорость грузовой машины на 30 км/ч меньше, чем скорость легковой. Через 2 ч машины еще не встретились, но через 3 ч после встречи они стали удаляться друг от друга. Оцените скорость грузовой машины.

985. Прилетевшие вороны расселись по деревьям. На первое дерево села половина всех ворон. На второе – половина оставшихся ворон. На третье дерево – половина нового остатка. А оставшиеся 3 вороны сели на четвертое дерево. Сколько ворон прилетело?
A. 21 ворона; **B.** 24 вороны; **C.** 18 ворон; **D.** 30 ворон.

986. Выполните действия:

$$\frac{(6,25-2,8)\cdot\dfrac{20}{23}}{\dfrac{7}{16}\cdot\left(3\dfrac{5}{21}+1\dfrac{1}{3}\right)}+0,5\cdot\left(6,1+\frac{2,1}{\dfrac{14}{15}+1,4}\right).$$

Ключевые факты.

Решение систем линейных неравенств с одной переменной.

Если ставится задача найти множество общих решений двух или нескольких неравенств, то надо их объединить фигурной скобкой в одну систему.

Пример 1. Запись $\begin{cases} 3x-1>5, \\ 2x+1<13 \end{cases}$ означает, что неравенства $3x - 1 > 5$ и $2x + 1 < 13$ образуют систему.

Решить систему неравенств – значит найти множество ее решений.

Множество решений системы неравенств есть пересечение множеств решений входящих в него неравенств.

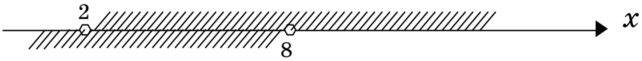
Пример 2. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 4x - 3 > 5, \\ 3x + 1 < 25. \end{cases}$$

Заменив каждое неравенство системы равносильным ему неравенством, получим систему:

$$\begin{cases} 4x > 8, \\ 3x < 24; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 2, \\ x < 8. \end{cases}$$

Используя координатную прямую, можно найти общее решение неравенств $x < 2$ и $x < 8$, то есть



– пересечение множеств их решений.

Пересечение этих множеств представляет собой числовой промежуток (2; 8).

Ответ: (2; 8).

969. 1) [−3; 4); 2) (−∞; 4); 3) [−3; +∞); 4) [−4; 6]; 5) (−9; −2); 6) ∅. **970.** 1) (−4; 0); 2) (−∞; −5]; 3) [−2; 3]; 4) (−9; −5). **971.** 1) (−1; 2); 2) (1; 4); 3) (−2; 1); 4) (−9; −1). **973.** $22 < x < 27$; **974.** 1) 1,46; 2) −4,8; 3) 6,11; 4) 0,45. **975.** 1) (2,5; +∞); 2) [1,5; 3]; 3) (−2; −1,5); 4) (−∞; 1). **976.** 1) (−2; 3); 2) (−∞; 2); 3) ∅; 4) [5; 7]. **977.** 1) (−∞; 4); 2) [5; +∞); 3) ∅. 4) (−5; 2). **980.** 1) 5; 2) 9,5; 3) 1,2. **981.** 1) (−5; −2); 2) [−2; 16]; 3) [−2; 8]; 4) ∅. **982.** 1) (12; 16); 2) (14; 17). **983.** 1) [−3; 0); 2) (−1,5; 1); 3) (3,2; 3,8); 4) (−1; 3). **984.** $33 < x < 57$. **986.** 5.

5.7. Решение линейных неравенств с одной переменной, содержащих переменную под знаком модуля

$|x| < 2$; $|x| \geqslant 3$; $|x - 2| \leqslant 5$; $|x + 3| > 7$ – линейные неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.

Пример 1. Решить неравенство $|x| \leqslant 6$.

Способ 1.

Решение.

На координатной прямой от точки с координатой 0 на 6 единиц удалены точки с координатами −6 и 6 (рис. 5.26). А точки, удаленные от точки с координатой 0 на расстояние не больше, чем на 6 единиц, лежат на отрезке, соответствующем промежутку [–6; 6].

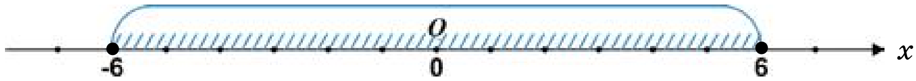


Рис. 5.26

Значит, множество чисел x, являющихся решением неравенства $|x| \leqslant 6$, принадлежит промежутку [–6; 6].

Способ 2.

Решение.

1) Если $x \geqslant 0$, то $x \leqslant 6$.

2) Если $x < 0$, то $-x \leqslant 6$, $x \geqslant -6$

Получим: $0 \leqslant x \leqslant 6$ или $-6 \leqslant x < 0$

Объединяя эти решения, получим: $-6 \leqslant x \leqslant 6$.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $-6 \leqslant x \leqslant 6$, принадлежит промежутку [–6; 6].

Ответ: [–6; 6].

Пример 2. Решить неравенство $|x-2| < 4$.

Способ 1.

Решение.

На координатной прямой от точки с координатой 2 на 4 единицы удалены точки с координатами –2 и 6 (рис. 5.27), а меньше, чем на 4 единицы – точки на промежутке (–2; 6).

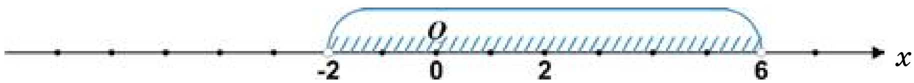


Рис. 5.27

Значит, множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $|x-2| < 4$, принадлежит промежутку

(–2; 6).

Способ 2.

Решение.

Решение неравенства $|x-2| < 4$ представляем в виде двойного неравенства или в виде системы неравенств.

1) Двойным неравенством:

$$-4 < x - 2 < 4,$$

$$-4 + 2 < x - 2 + 2 < 4 + 2,$$

$$-2 < x < 6.$$

2) Системой неравенств:

$$\begin{cases} x - 2 < 4, \\ x - 2 > -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 6, \\ x > -2, \end{cases}$$

то есть

$$-2 < x < 6.$$

Множество чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству $-2 < x < 6$, принадлежит промежутку $(-2; 6)$.

Ответ: $(-2; 6)$.

Вывод:

Если $a > 0$, то:

1) неравенство $|x| \leqslant a$ равносильно двойному неравенству $-a \leqslant x \leqslant a$ или системе неравенств $\begin{cases} x \leqslant a, \\ x \geqslant -a; \end{cases}$

2) неравенство $|x| < a$ равносильно двойному неравенству $-a < x < a$ или системе неравенств $\begin{cases} x < a, \\ x > -a. \end{cases}$

Примеры:

1) $|x| \leqslant 4{,}3$ равносильно неравенству $-4{,}3 \leqslant x \leqslant 4{,}3$;

2) $|x| < 9$ равносильно неравенству $-9 < x < 9$.

Пример 3. Решим неравенство $|x + 2| \geqslant 3$.

Способ 1.

Решение.

Запишем данное неравенство в виде $|x - (-2)| \geqslant 3$.

По условию данного неравенства $|x - (-2)| \geqslant 3$ нужно указать на координатной прямой множество точек x, удаленных от точки с координатой -2 на расстояние не меньше, чем на 3 единицы.

На координатной прямой от точки с координатой -2 на 3 единицы удалены точки с координатами -5 и 1 (рис. 5.28).

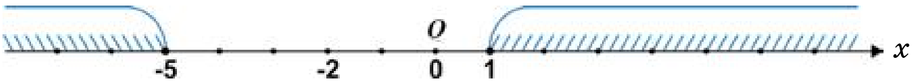


Рис. 5.28

Точки x на координатной прямой, удаленные от точки с координатой -2 на расстояние не меньше, чем на 3 единицы, лежат на одном из промежутков: либо на промежутке $(-\infty; -5]$, либо на промежутке $[1; +\infty)$.

Значит, решением неравенства является объединение этих промежутков, то есть

$$(-\infty; -5] \cup [1; +\infty).$$

Способ 2.

Решение.

1) Если $x+2 \geqslant 0$,
то $x+2 \geqslant 3$,
$x \geqslant 1$,
или $[1; +\infty)$.

2) Если $x + 2 < 0$,
то $-(x + 2) \geqslant 3$,
$x + 2 \leqslant -3$,
$x \leqslant -5$,
или $(-\infty; -5]$.

Значит, решением неравенства $|x+2| \geqslant 3$ является

$$(-\infty; -5] \cup [1; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$.

Вывод.

Если $a > 0$, то:

1) решением неравенства $|x| \geqslant a$ является объединение решений неравенств $x \geqslant a$, $x \leqslant -a$;

2) решением неравенства $|x| > a$ является объединение решений неравенств $x > a$, $x < -a$.

Если $a < 0$, то:

1) неравенства $|x| \leqslant a$ и $|x| < a$ не имеют решений;

2) решением неравенств $|x| > a$ является любое число на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Примеры: 1) $|x| \leqslant -4$. Неравенство не имеет решений.

2) $|x| > -5$. Решением неравенства является любое число, то есть промежуток $(-\infty; +\infty)$.

3) $|x| \leqslant 0$. Неравенство имеет единственное решение, равное 0.

1. Что является решением неравенства $|x| \leqslant a$, если $a > 0$?
2. Что является решением неравенства $|x| > a$, если $a > 0$?
3. В каком случае неравенство с модулем имеет бесконечное множество решений?
4. Приведите пример неравенства с модулем, не имеющего решений.

987. Имеют ли решение неравенства:

1) $|x| < 7$;
2) $|x| \leqslant -8$;
3) $|x| \leqslant 0$;
4) $|x| < 6,5$;
5) $|x| \geqslant -6$;
6) $|x| > 3$?

A

988. **1)** Запишите в виде двойного неравенства неравенство с модулем:

а) $|x-3|<5{,}2$; б) $|x+4|\leqslant 3$; в) $|2+3x|<4{,}7$.

2) Запишите в виде неравенства с модулем двойное неравенство:

а) $-5\leqslant x+2\leqslant 5$; б) $-6<x-4<6$; в) $-8\leqslant x+3\leqslant 8$.

989. Решите неравенства и покажите на координатной прямой множество их решений:

1) $|x|<3$; 2) $|x|\leqslant 4$; 3) $|y|\geqslant 5$; 4) $|y|>2$.

990. Решите неравенства и изобразите множество их решений на координатной прямой:

1) $|x-7|>0$; 3) $|2+x|\leqslant 3$; 5) $|x-4|\geqslant 3$;

2) $|x-4|<3$; 4) $|x+3|>2$; 6) $|x+2|\geqslant 5$.

991. Решите неравенства:

1) $|x-3|\geqslant 1{,}8$; 3) $|3-x|<1{,}2$; 5) $|0{,}5-x|\geqslant 3$;

2) $|2-x|>\dfrac{1}{3}$; 4) $|4+x|\leqslant 1{,}8$; 6) $|6-x|\leqslant 2{,}1$.

992. Воробей догоняет стрекозу, находящуюся от него на расстоянии 7,4 м. Скорость стрекозы 3,7 м/с, а скорость воробья 5,8 м/с. Чему будет равно расстояние между воробьем и стрекозой через 1 с?

A. 5,8 м; **B.** 5,3 м; **C.** 4,2 м; **D.** 2,1 м.

B

993. Множество чисел x, изображенных на рисунке 5.29, запишите в виде неравенства, содержащего переменную под знаком модуля:

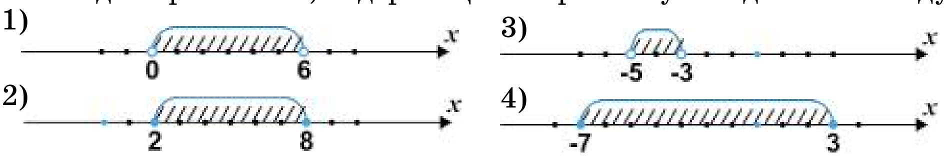


Рис. 5.29

A. $|x+4|<1$; **B.** $|x+2|\leqslant 5$; **C.** $|x-3|<3$; **D.** $|x-5|\leqslant 3$.

994. Решите двойное неравенство и запишите множество его целых решений:

1) $1{,}5<|x|<5$; 2) $4\leqslant |x|<6{,}2$; 3) $2\leqslant |x|\leqslant 5$; 4) $2<|x|\leqslant 7{,}5$.

995. Решите неравенства:

1) $|2x+1|<3$; 3) $|3x-2|>7$; 5) $|5x+3|<7$;

2) $|1-2x|\leqslant 5$; 4) $|4+3x|\geqslant 2$; 6) $|4x+3|\geqslant 5$.

996. Решите неравенства и запишите множество их целых решений:

1) $|4x+1|<7$; 3) $|x+1|<2{,}5$; 5) $|2+3x|<7$;

2) $|2x+3|\leqslant 4$; 4) $|2x-5|\leqslant 3$; 6) $|2-5x|\leqslant 8$.

997. Имеются чашечные весы и гиря массой 100 г. Взвешивая только три раза, как можно разложить крупу массой 3 кг 500 г в два пакета массой 1 кг и 2 кг 500 г?

998. Решите уравнения:

1) $\dfrac{10}{3+|x|}=2$; 3) $\dfrac{20}{1+|x|}=4$; 5) $\dfrac{35}{4+3|x|}=5$;

2) $\dfrac{15}{2+|x|}=3$; 4) $\dfrac{18}{1+4|x|}=2$; 6) $\dfrac{30}{3+4|x|}=2$.

C

999*. Множество чисел x, изображенных на рисунке 5.30, запишите в виде неравенства, содержащего знак модуля:

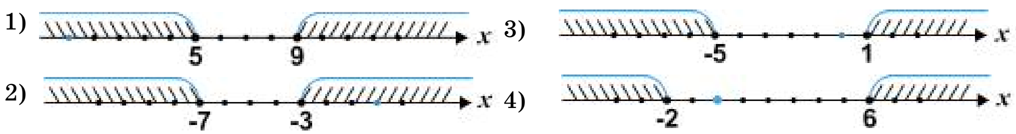


Рис. 5.30

A. $|x-7|\geqslant 2$; **B.** $|x-2|\geqslant 4$; **C.** $|x+5|\geqslant 2$; **D.** $|x+2|\geqslant 3$.

1000. При каких значениях x расстояние между точками $A(x)$ и $B(3)$:
1) больше 4; 3) меньше 5;
2) не меньше 2; 4) не больше 6?

1001.* Решите двойные неравенства и запишите множество целых чисел, которые являются их решениями:

1) $2 < |x+1| < 5$; 4) $1{,}6 \leqslant |x-1| \leqslant 3$;

2) $1{,}7 \leqslant |3-x| \leqslant 4$; 5) $4{,}5 < |x+3| \leqslant 7$;

3) $2{,}3 \leqslant |x-4| < 6$; 6) $3{,}2 \leqslant |x+2| \leqslant 6$.

1002. Из квадрата периметром 48 см вырезали круг, диаметр которого равен длине стороны квадрата. Найдите площадь этого круга.

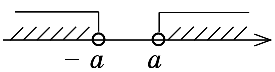
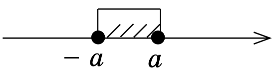
1003. Вычислите:

1) $10 - \dfrac{7}{8 + \dfrac{4}{6 - \dfrac{3}{4 + \dfrac{1}{2}}}}$; 2) $8 - \dfrac{7}{6 - \dfrac{11}{5 - \dfrac{2}{4 - \dfrac{2}{3}}}}$.

Ключевые факты.

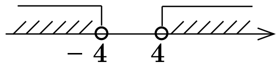
Решение линейных неравенств с одной переменной, содержащих переменную под знаком модуля.

Рассмотрим решение неравенств с модулями:
$|x| > a$; $|x| < a$; $|x| \geqslant a$; $|x| \leqslant a$.

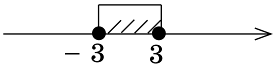
Неравенство $a > 0$	Множество решений		Неравенство $a < 0$	Множество решений
	На координатной прямой	Обозначение		
$\lvert x\rvert > a$		$(-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$	$\lvert x\rvert > a$	$(-\infty; +\infty)$
$\lvert x\rvert \leqslant a$		$[-a; a]$	$\lvert x\rvert \leqslant a$	Если $a < 0$, то $\varnothing$. Если $a = 0$, то $\{0\}$.

Примеры.

1) $|x| > 4$; $x > 4$ или $x < -4$



Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.



2) $|x| \leqslant 3$; $-3 \leqslant x \leqslant 3$
Ответ: $[-3; 3]$.

3) $|x| > -2$. Неотрицательное число всегда больше отрицательного числа. Данное неравенство верно при всех значениях x.
Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

4) $|x| \leqslant -5$. Неотрицательное число всегда больше отрицательного числа. Данное неравенство не имеет решений ни при каких x.
Ответ: $\varnothing$.

5) $|x| \leqslant 0$.
Ответ: $\{0\}$.

990. 2) $(1; 7)$; 3) $[-5; 1]$; 6) $(-\infty; -7] \cup [3; +\infty)$. **991.** 1) $(-\infty; 1{,}2] \cup [4{,}8; +\infty)$; 3) $(1{,}8; 4{,}2)$; 5) $(-\infty; -2{,}5] \cup [3{,}5; +\infty)$. **994.** 1) $\{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$; 3) $\{-5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5\}$. **995.** 1) $(-2; 1)$; 2) $[-2; 3]$; 3) $\left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right) \cup (3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -2] \cup \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **996.** 1) $\{-1, 0, 1\}$; 2) $\{-3, -2, -1, 0\}$; 6) $\{-1, 0, 1, 2\}$. **998.** 1) -2; 2; 2) -3; 3; 6) -3; 3. **1000.** 1) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$; 3) $(-2; 8)$. **1001.** 1) $\{-5, -4, 2, 3\}$; 2) $\{-1, 0, 1, 5, 6, 7\}$; 3) $\{-1, 0, 1, 7, 8, 9\}$; 4) $\{-2, -1, 3, 4\}$; 5) $\{-10, -9, -8, 2, 3, 4\}$; 6) $\{-8, -7, -6, 2, 3, 4\}$. **1002.** 36π см^2. **1003.** 1) 9,2; 2) 6.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ V

1004. Сравните числа a и b, если разность $a - b$ равна:
1) -4; 2) 7; 3) 0; 4) $-0{,}5$.

1005. Начертите координатную прямую и покажите расположение точек, имеющих координаты a, b, c и d, если $a > b$; $d > a$; $d < c$.

1006. Известно, что $m > n$. Сравните числа:
1) m и $n - 5$; 2) $m + 2$ и n; 3) $m + 8$ и $n - 1$.

1007. Сложите почленно неравенства:
1) $15 > -3$ и $5 > -2$; 3) $6 < 7$ и $0{,}5 < 2$;
2) $6 < 10$ и $-3 < 2$; 4) $12 > 9$ и $5 > 4$.

1008. Если $a > b$, то какое из следующих неравенств верное:

1) $a + 1{,}3 > b + 0{,}5$; 3) $b - 2\frac{5}{9} < a + \frac{5}{9}$;

2) $3{,}7 + b > 4 + a$; 4) $a + \frac{1}{4} > b - 1$?

1009. Решите неравенства и изобразите множество их решений на координатной прямой:

1) $4{,}5x - 1{,}4 \leqslant 7{,}6$; 3) $7 - 1{,}2x > 2 + 3{,}8x$;

2) $3x - 1{,}2 \geqslant 3{,}3$; 4) $3x + 7 < x - 1$.

1010. Запишите множество целых чисел, удовлетворяющих неравенствам:

1) $|x| < 5{,}1$; 2) $|x| \leqslant 2$; 3) $|x| < 4{,}3$; 4) $|x| \leqslant 3{,}5$.

1011. Запишите числовой промежуток, изображенный на рисунке 5.31.

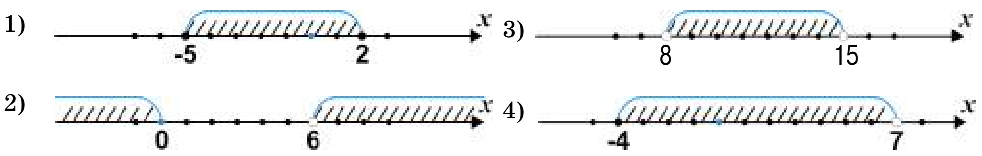


Рис. 5.31

1012. Пусть $5 < x < 8$. Оцените:

1) $2x$; 2) $-4x$; 3) $x - 3$; 4) $2x + 1$; 5) $\frac{1}{x}$.

1013. Решите неравенства:

1) $\frac{4}{5x+8} < 0$; 3) $\frac{4}{2x-9} > 0$; 5) $\frac{9}{2x-7} < 0$;

2) $\frac{-1{,}8}{2{,}7x - 13{,}5} < 0$; 4) $\frac{-1{,}9}{6{,}3 - 3x} > 0$; 6) $\frac{-3}{1{,}6x - 9{,}6} > 0$.

1014. Используя координатную прямую, найдите пересечение промежутков:

1) $(-12;\ 7)$ и $(-1;\ 18)$; 3) $[-9;\ 5]$ и $[5;\ +\infty)$;

2) $(-\infty;\ -6)$ и $(2;\ +\infty)$; 4) $(-8;\ 10)$ и $(-3;\ 6)$.

1015. Масса дыни не меньше 4 кг, но не больше 6 кг. Масса арбуза не меньше 8 кг, но не больше 10 кг. Оцените массу дыни и массу арбуза.

1016. Решите системы неравенств:

1) $\begin{cases} 0,25x - 1 < 0, \\ 0,7x > 1,4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 13x - 1 > 7x + 1, \\ 1 - x < 4 - 3x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1,2x + 3,6 \geqslant 0, \\ 0,8x - 4 \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x - 21 \leqslant 3 + x, \\ 5x - 8 > 1 + 2x. \end{cases}$

1017. Решите неравенства:

1) $|9 - x| < 2$; 3) $|10 + x| \leqslant 3$; 5) $|x - 5| < 11$;

2) $|x + 7| > 8$; 4) $|x - 8| \geqslant 9$; 6) $|6 - x| > 7$.

C

1018. Покажите штриховкой на координатной прямой объединение промежутков:

1) $(-6;\ 0)$ и $(8;\ 13)$; 3) $(6;\ +\infty)$ и $(9;\ +\infty)$;

2) $[-10;\ 1]$ и $[-4;\ 7]$; 4) $(-\infty;\ 3)$ и $(5;\ +\infty)$.

1019. Решите двойные неравенства:

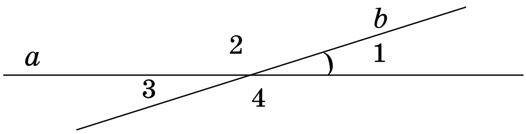
1) $-3 < 1 + 2x < 4$; 2) $1 \leqslant 3 - x \leqslant 5$; 3) $-7 < 2x - 5 \leqslant 1$.

1020. Решите двойные неравенства. Запишите множество их целых решений.

1) $3 \leqslant |x + 4| \leqslant 5$; 2) $5 < |x - 3| < 8$; 3) $2 < |x - 1| \leqslant 5$

▲ **1015.** $12 \leqslant x + y \leqslant 16$. **1016.** 1) $(2;\ 4)$; 4) $(3;\ 8]$. **1017.** 1) $(7;\ 11)$; 2) $(-\infty;\ -15) \cup (1;\ +\infty)$; 3) $[-13;\ -7]$. **1019.** 1) $(-2;\ 1,5)$; 2) $[-2;\ 2]$; 3) $(-1;\ 3]$. **1020.** 1) $\{-9,\ -8,\ -7,\ -1,\ 0,\ 1\}$; 2) $\{-4,\ -3,\ 9,\ 10\}$.

1) Сколько общих точек имеют прямые a и b, изображенные на рисунке?



2) $\angle 1 = 20^\circ$. Найдите градусную меру углов $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$.

3) Какие углы равны между собой? Запишите.

Глава VI. КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ

6.1. Плоскость. Пересекающиеся прямые

I. Плоскость.

Поверхность стола, оконного стекла, водная гладь озера дают нам представление о части плоскости, так как все эти поверхности имеют края. У плоскости края нет.

Плоскость безгранично простирается во всех направлениях.

На рисунках мы изображаем только часть плоскости. Например, поверхность листа бумаги мы воспринимаем как плоскость.

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну (рис. 6.1).

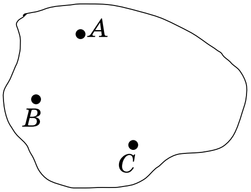


Рис. 6.1

Плоскость чаще всего обозначают малыми буквами греческого алфавита (α, β, γ, ...). Однако плоскость можно обозначать и тремя заглавными латинскими буквами (A, B, C, ...), заключенными в скобки. Например, плоскость, изображенная на рисунке 6.1, обозначается так: (ABC).

II. Прямые. Пересекающиеся прямые.

Представление о прямой дает, например, туго натянутая тонкая нить. Прямая линия не имеет ни начала, ни конца. Она неограниченно продолжается в обе стороны.

Через любые две точки можно провести только одну прямую.

Значит, через две точки A и B на плоскости можно провести только одну прямую AB (рис. 6.2.)

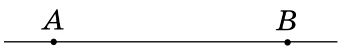


Рис. 6.2

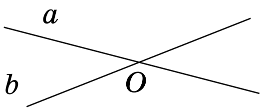


Рис. 6.3

На рисунке 6.3 изображены прямые a и b и точка O, которая принадлежит и прямой a, и прямой b. Точка O – общая точка прямых a и b. Такие прямые называются *пересекающимися прямыми*.

Прямые называются пересекающимися, если они имеют только одну общую точку.

Значит, прямые a и b – пересекающиеся. O – точка пересечения прямых a и b.

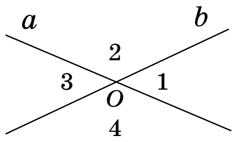


Рис. 6.4

При пересечении двух прямых на плоскости образуются четыре угла с общей вершиной (не считая развернутых углов). На рисунке 6.4 изображены углы, образованные при пересечении двух прямых a и b на плоскости. Это: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$.

Стороны угла 1 являются продолжениями сторон угла 3. Стороны угла 2 являются продолжениями сторон угла 4.

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжением сторон другого.

Тогда $\angle 1$ и $\angle 3$ – вертикальные углы; $\angle 2$ и $\angle 4$ – также вертикальные углы.

Если известна градусная мера одного из углов, образованных при пересечении двух прямых a и b, то можно найти градусную меру остальных углов.

Например, $\angle 1 = 50^\circ$.

Найдем градусную меру углов 2, 3 и 4.

$\angle 1$ и $\angle 2$ образуют развернутый угол, значит,

$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\quad \angle 2 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$; $\quad \angle 2 = 130^\circ$;

$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, $\quad \angle 3 = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$; $\quad \angle 3 = 50^\circ$;

$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$, $\quad \angle 4 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$; $\quad \angle 4 = 130^\circ$.

Из вычислений видно, что $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$.

Вертикальные углы равны между собой.

При пересечении двух прямых образуются две пары вертикальных углов. Если одна пара – острые углы, то другая – углы тупые.

1. Приведите примеры, дающие представление о плоскости.
2. Сколько прямых можно провести через две точки?
3. Какие прямые называются пересекающимися?
4. Какие два угла называются вертикальными?

A

1021. 1) На сколько частей делят плоскость две пересекающиеся прямые?

2) Отметьте в тетради три точки, не лежащие на одной прямой. Через каждые две точки проведите прямые. Сделайте рисунок.

- Сколько прямых можно провести?
- На сколько частей делят плоскость построенные прямые?

1022. На рисунке 6.5 изображены прямые, пересекающиеся в точке O. При пересечении этих прямых образовались: $\angle 1$; $\angle 2$; $\angle 3$; $\angle 4$; $\angle 5$

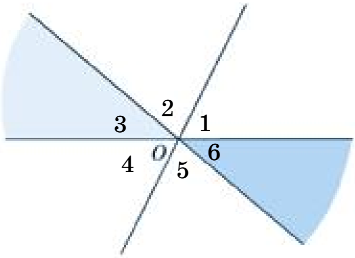


Рис. 6.5

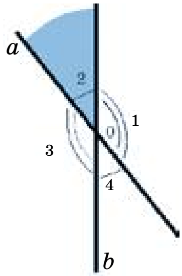


Рис. 6.6

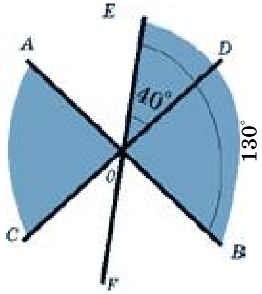


Рис. 6.7

и $\angle 6$. Какие углы являются вертикальными? Запишите в виде равенства.

1023. Прямые a и b пересекаются в точке O (рис. 6.6). $\angle 2 = 40^{\circ}$. Найдите градусные меры $\angle 1$, $\angle 3$ и $\angle 4$.

1024. На рисунке 6.7 $\angle EOD = 40°$; $\angle EOB = 130°$. Найдите градусную меру угла AOC.

1025. 1) При пересечении двух прямых в точке O образовались равные между собой углы. Какова градусная мера каждого угла?
2) При пересечении трех прямых в точке O образовались равные между собой углы. Какова градусная мера каждого угла?

1026. Сумма одной пары вертикальных углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 126°. Найдите градусную меру каждого угла, полученного при пересечении этих двух прямых.

1027. При пересечении двух прямых один из полученных углов равен: 1) 75°; 2) 120°. Найдите градусные меры остальных углов.

1028. При пересечении двух прямых AB и CD в точке O образовались углы AOC и COB, градусные меры которых относятся как 5 : 7. Найдите градусные меры углов AOD и BOD.

1029. Прямые AB, CD и EF пересекаются в точке O. $\angle AOE = 40°$; $\angle DOF = 80°$. Найдите градусную меру угла COB (рис. 6.8).

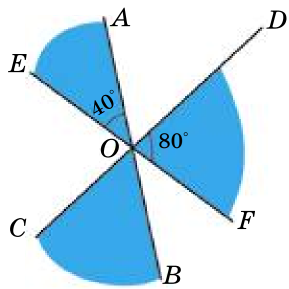


Рис. 6.8

1030. Прямые NP, KL и EF пересекаются в точке O. Угол EOK равен 35°, а угол NOK равен 85°. Найдите градусные меры углов FOP, KOP (рис. 6.9).

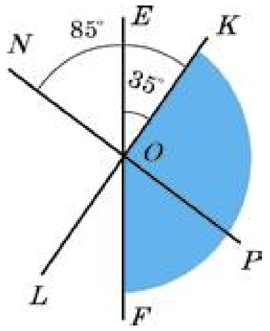


Рис. 6.9

1031. Найдите неизвестный член пропорции:

1) $0{,}25 : 1{,}4 = 0{,}75 : x$;   3) $x : 4\frac{1}{3} = \frac{1}{2} : 13$;

2) $4 : 8 = 18 : x$;   4) $x : 16 = 0{,}2 : 4$.

C

1032. Сумма трех углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 284°. Найдите градусную меру каждого угла.

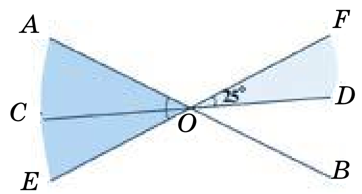


Рис. 6.10

1033*. Сколько градусов составляет угол между часовой и минутной стрелками часов, если часы показывают 9 ч 10 мин?

1034. Прямые AB, CD и EF пересекаются в точке O (рис. 6.10). $\angle AOE = 55^\circ$, $\angle DOF = 25^\circ$. Найдите градусную меру углов BOE и BOD.

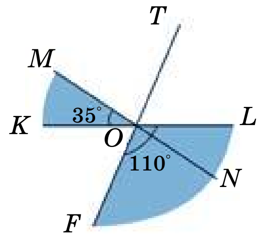


Рис. 6.11

1035. Прямые MN, KL и FT пересекаются в точке O. $\angle FOL = 110^\circ$ и $\angle KOM = 35^\circ$. Найдите градусные меры углов MOT и KOF (рис. 6.11).

Ключевые факты.

Плоскость. Пересекающиеся прямые.

I. Плоскость.

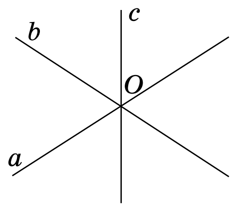
Представить себе плоскость можно, рассматривая поверхность классной доски, зеркала или поверхность воды в сосуде и т.д.

Но эти поверхности имеют края, а у плоскости нет края. Плоскость безгранична во всех направлениях.

II. Пересекающиеся прямые.

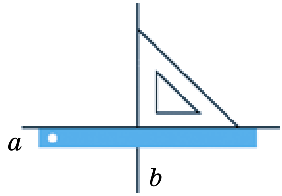
Две или несколько прямых, имеющих только одну общую точку, называются *пересекающимися прямыми*. Их общая точка называется *точкой пересечения*.

Например, прямые a, b, и c – пересекающиеся прямые, где O – точка пересечения.



1024. $\angle AOC = 90^\circ$. **1028.** 75°; 105°. **1029.** 60°. **1030.** 50°; 95°. **1033.** 145°. **1034.** 125°; 30°. **1035.** 75°; 70°.

1) Используя чертежный треугольник и линейку, построить четыре равных между собой угла.
2) С помощью транспортира определите градусную меру каждого угла.
3) Приведите примеры таких прямых, которые при пересечении образуют четыре равных между собой угла (в технике, быту).



6.2. Перпендикулярные прямые. Перпендикулярные отрезки

Две прямые, образующие при пересечении прямые углы, называются ***перпендикулярными***.

Прямые AB и CD на рисунке 6.12 перпендикулярны.

Перпендикулярность прямых обозначается знаком $\perp$. Пишут: $AB \perp CD$. Читают: «Прямая AB перпендикулярна прямой CD».

Это название произошло от латинского *perpendicularis*, что означает «отвесный».

Для построения перпендикулярных прямых используют чертежный треугольник (рис. 6.13, *а*) или транспортир (рис. 6.13, *б*).

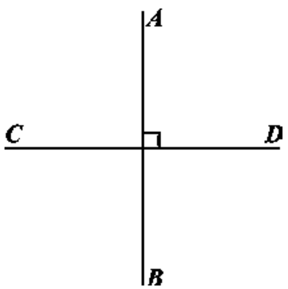


Рис. 6.12

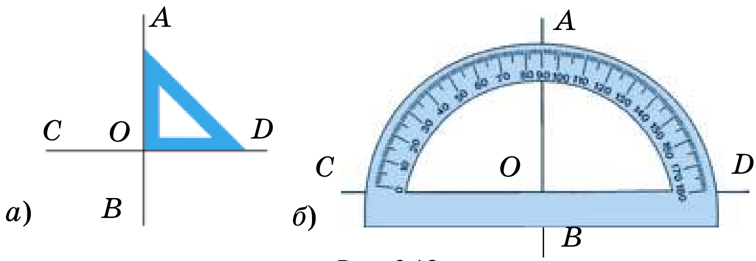


Рис. 6.13

6–3451

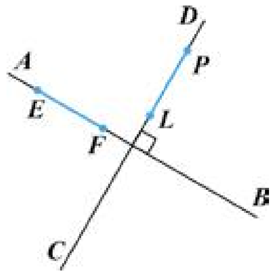


Рис. 6.14

Отрезки, лежащие на перпендикулярных прямых, называют перпендикулярными отрезками (рис. 6.14).

Отрезки EF и LP лежат на перпендикулярных прямых AB и CD. Отрезки EF и LP – перпендикулярные отрезки. $EF \perp LP$, или $LP \perp EF$.

Смежные стороны квадрата и прямоугольника являются взаимно перпендикулярными отрезками.

На рисунке 6.15 показано, как построить перпендикуляр CD к прямой AB через точку C, не лежащую на данной прямой (рис. 6.15, *а*), и лежащую на данной прямой (рис. 6.15, *б*).

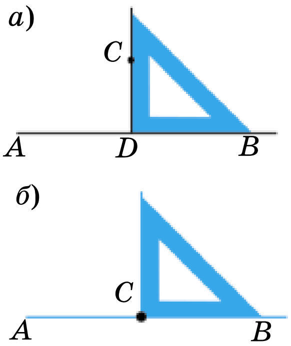


Рис. 6.15

Через данную точку можно провести только одну прямую, которая перпендикулярна данной прямой.

Перпендикуляр короче всех других отрезков (рис. 6.16), *проведенных из данной точки к прямой.*

$EF < EK$; $EF < EL$. Отрезок EF называют перпендикуляром, проведенным из точки E к прямой AB: $EF \perp AB$. Точку F называют ***основанием перпендикуляра*** EF. $EF = 2{,}4$ см. Значит, расстояние от точки E до прямой AB равно 2,4 см.

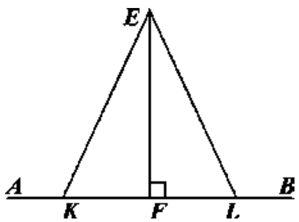


Рис. 6.16

Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, проведенного из этой точки к данной прямой.

1. Какие две прямые называют перпендикулярными?
2. Какие отрезки называют перпендикулярными?
3. Как найти расстояние от точки до прямой?

1036. Устно выполните цепочку действий:

1) $1 - 0{,}25$; $\cdot\, 10$; $:\, 3$; $-\, 4$; $\cdot\, 2$; ?

2) $3 : \frac{1}{5}$; $:\, (-10)$; $-\, 4{,}5$; $\cdot\, 3$; $:\, 1{,}8$; ?

3) $-0{,}4 \cdot 5$; $+\, 1{,}6$; $-\, 3{,}6$; $:\, 0{,}8$; $\cdot\, 1{,}2$; ?

4) $-0{,}2 \cdot 7$; $\cdot\, (-10)$; $:\, (-7)$; $+\, 5$; $\cdot\, (-6)$; ?

А

1037. Перечертите рисунок 6.17 в тетрадь. Проведите перпендикуляр к прямой a через точку: 1) E; 2) F.

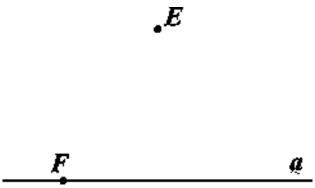


Рис. 6.17

1038. Какой из отрезков: AB, AC или AD перпендикулярен прямой p (рис. 6.18)? Длина какого отрезка является расстоянием от точки A до прямой p? Измерьте его. Как называется точка C?

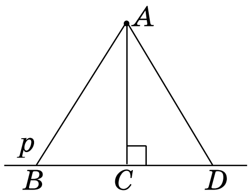


Рис. 6.18

1039. К прямой AB из точки C проведен перпендикуляр CD, $\angle EDB = 120°$ (рис. 6.19). Какова градусная мера углов EDC и ADE?

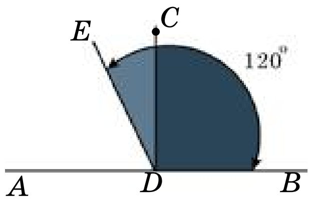


Рис. 6.19

1040. Прямые KL, NP и AB пересекаются в точке O. Причем $KL \perp NP$ и $\angle KOB = 34°$. Найдите градусные меры угла AON.

1041. Найдите значение выражений:

1) $|a| + |b|$ при $a = 9{,}3$; $b = -7{,}1$;

2) $|a| - |b|$ при $a = 3{,}2$; $b = -0{,}5$;

3) $|a| \cdot |b|$ при $a = -3\dfrac{5}{9}$; $b = -0{,}75$;

4) $|a| : |b|$ при $a = -7{,}5$; $b = -\dfrac{3}{4}$.

В

1042. Перечертите рисунок 6.20 в тетрадь. На каком расстоянии (в клетках) находятся точки A, B, C и D от прямых k и l?

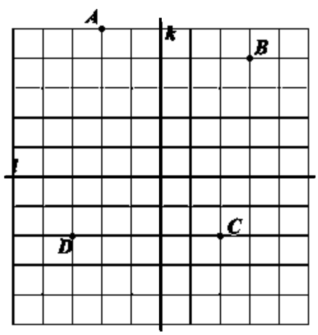


Рис. 6.20

1043. Перечертите треугольник ABC в тетрадь (рис. 6.21). Измерьте расстояние (в миллиметрах):
1) от вершины B до стороны AC;
2) от вершины C до стороны AB.

1044. Прямые AB, CD и EF пересекаются в точке O (рис. 6.22). Причем $AB \perp CD$. $\angle AOE = 30°$. Найдите градусную меру угла COF.

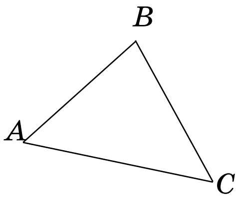


Рис. 6.21

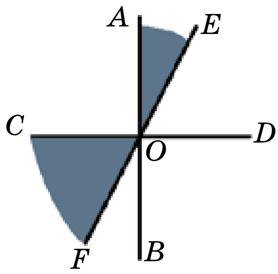


Рис. 6.22

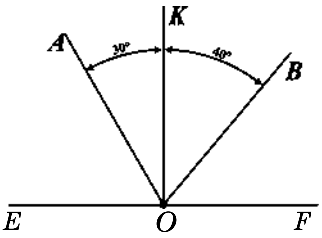


Рис. 6.23

1045. Какие из следующих утверждений верны:
1) через данную точку к прямой можно провести несколько перпендикуляров;
2) перпендикулярные прямые делят плоскость на четыре прямых угла;
3) две пересекающиеся прямые всегда перпендикулярны;
4) через данную точку можно провести только одну прямую, которая перпендикулярна данной прямой.

1046. На рисунке 6.23 $KO \perp EF$. $\angle AOB = 70^\circ$ и $\angle AOK = 30^\circ$. Найдите углы AOE и BOF.

1047. Прямая AB перпендикулярна прямой CD. $\angle FOB = 150^\circ$. Какова градусная мера углов EOB и EOC (рис. 6.24)?

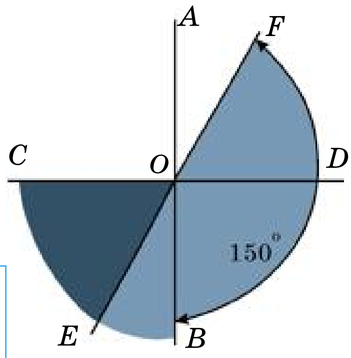


Рис. 6.24

1048. 17 участников команды «Комета» набрали 135 баллов. Докажите, что хотя бы двое из них набрали равное количество баллов.

1049. Решите уравнения:

1) $\dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{5}x - \frac{1}{3}} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{24}$; 2) $\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}x - \frac{1}{2}} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{3}$.

C

1050. Прямая AB перпендикулярна прямой CD. Прямая EF перпендикулярна прямой KL (рис. 6.25). $\angle AOK = 40^\circ$. Найдите градусные меры углов COF и FOB.

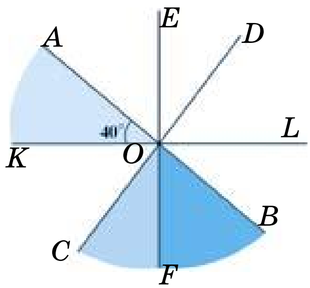


Рис. 6.25

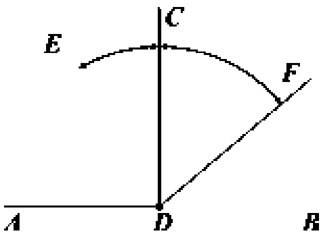


Рис. 6.26

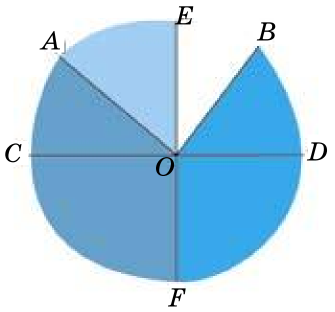


Рис. 6.27

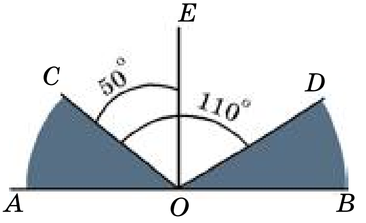


Рис. 6.28

1051. На рисунке 6.26 $CD \perp AB$. $\angle ADF = 140^\circ$ и $\angle EDB = 120^\circ$. Найдите градусную меру угла EDF.

1052. Найдите градусную меру угла между часовой и минутной стрелками часов в 12 ч 15 мин.

A. $82^\circ 30'$; **B.** 84°; **C.** $85^\circ 30'$; **D.** $80^\circ 30'$.

1053. CD и EF – перпендикулярные прямые, $\angle AOB = 90°$, $\angle AOF = 125°$. Найдите градусные меры углов AOE и FOB (рис. 6.27).

1054. К прямой AB из точки E проведен перпендикуляр EO (рис. 6.28). $\angle COD = 110°$; $\angle COE = 50°$. Найдите градусную меру углов AOC и BOD.

1055. Решите задачу рациональным способом.
Чтобы добраться до места назначения, путешественники ехали три дня. В первый день они проехали 30% всего пути без 20 км. Во второй день они проехали 60% оставшегося пути без 10 км, и на третий день им осталось проехать 130 км.

- На каком расстоянии от начального пункта находится место назначения путешественников?
- Сколько километров они проехали в первый день?

1056. Вычислите и выберите правильный ответ:

$$\frac{0,5 + \dfrac{3 - \dfrac{2}{3}}{7}}{0,75 - \dfrac{2}{3}} - \frac{3 + \dfrac{2 - \dfrac{1}{3}}{5}}{1,25 - \dfrac{5}{6}}.$$

A. 3; **B.** 2; **C.** 2,5; **D.** 3,4.

Ключевые факты.

Перпендикулярные прямые. Перпендикулярные отрезки.

Две прямые AB и CD, образующие между собой прямые углы, называются взаимно перпендикулярными (рис. 1). Обозначают: $AB \perp CD$.

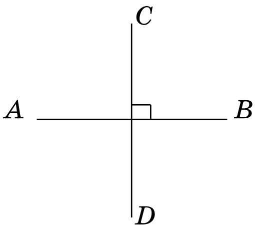


Рис. 1

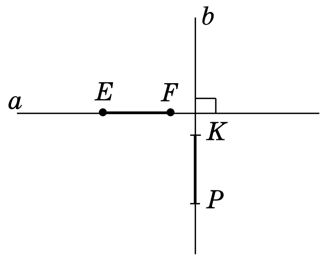


Рис. 2

2. Два отрезка называются перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых. $EF \perp KP$ (рис. 2).

3. К данной прямой через данную — на ней точку (E) / точку (F) вне ее — можно превести только один перпендикуляр (рис. 3, 4).

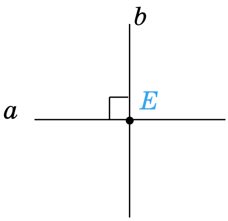


Рис. 3

$a \perp b$

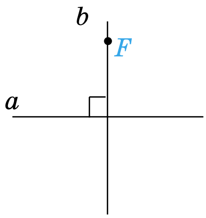
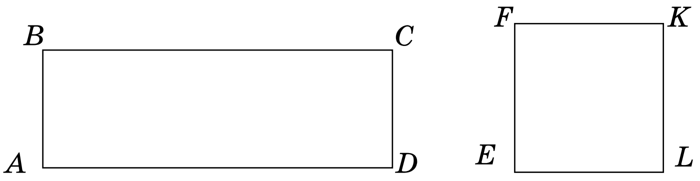


Рис. 4

1040. $\angle AON = 56^\circ$. **1046.** 60°; 50°. **1047.** 30°; 60°. **1049.** 1) 7; 2) 3. **1050.** 40°; 50°. **1051.** 80°. **1053.** 55°; 145°. **1054.** 40°; 30°. **1055.** • 400 км; • В первый день они прошли 100 км.

1) Приведите примеры непересекающихся прямых из окружающей среды.
2) Начертите в тетради пересекающиеся прямые AB и CD и непересекающиеся прямые EF и KN. В чем отличие пересекающихся прямых от непересекающихся?

3) Выпишите непересекающиеся стороны прямоугольника и квадрата.



6.3. Параллельные прямые. Параллельные отрезки

Нам известно, что если две прямые имеют одну общую точку, то они пересекаются. В технике и в быту встречаются прямые, которые не имеют общих точек. Например, следы колес автомашины на прямой дороге, противоположные ребра куба, противоположные края стола, листка тетради дают представление о параллельных прямых или о параллельных отрезках.

Если две прямые на плоскости не имеют общей точки, то они не пересекаются.

Две непересекающиеся прямые на плоскости называют *параллельными прямыми.*

Термин «параллельные» (от греческого *parallehos*) означает «рядом идущие».

Прямые a и b, изображенные на рисунке 6.29, – параллельные прямые. Пишут: $a \parallel b$. Эту запись читают: «Прямая a параллельна прямой b».

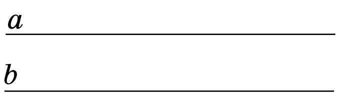


Рис. 6.29

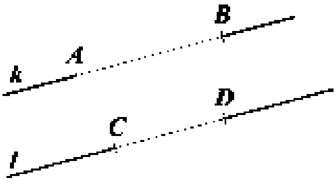


Рис. 6.30

Отрезки, лежащие на параллельных прямых, называют ***параллельными отрезками*** (рис. 6.30).

Отрезки AB и CD – параллельные отрезки, так как прямые k и l параллельны. $AB \parallel CD$.

Например, противоположные стороны квадрата и прямоугольника – параллельные отрезки.

Для построения параллельных прямых используют чертежный треугольник и линейку (рис. 6.31).

Чтобы провести параллельные прямые a и b, надо:

1) одну сторону чертежного треугольника приставить к линейке, а по другой его стороне провести прямую a;

2) передвинув по линейке чертежный треугольник (в выбранном направлении), провести вторую прямую b.

a и b – параллельные прямые. $a \parallel b$, или $b \parallel a$.

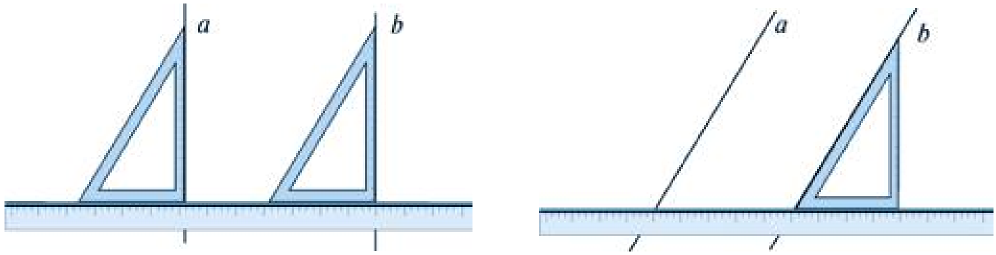


Рис. 6.31

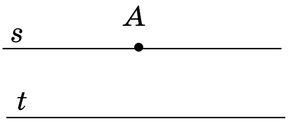


Рис. 6.32

Через каждую точку плоскости, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.

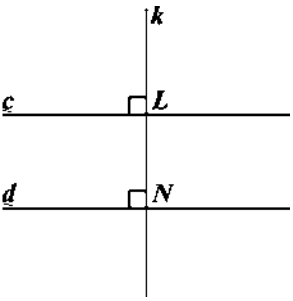


Рис. 6.33

На рисунке 6.32 точка A не лежит на прямой t. Через точку A параллельно прямой t проведена прямая s: $s \parallel t$.

На рисунке 6.33 построены прямые c и d, перпендикулярные одной и той же прямой k. Прямые c и d параллельны.

Если две прямые в плоскости перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны.

Если $c \perp k$ и $d \perp k$, то $c \parallel d$.

Прямые c и d отсекают на перпендикуляре отрезок LN. Длину этого отрезка называют расстоянием между параллельными прямыми. $LN = 13$ мм. Значит, расстояние между параллельными прямыми c и d равно 13 мм.

1. Какие прямые называют параллельными?
2. Как построить параллельные прямые?
3. Пересекаются ли две прямые, перпендикулярные третьей?

1057. Приведите примеры параллельных прямых из окружающей среды.

А

1058. Запишите, какие стороны квадрата $ABCD$ и прямоугольника $EFKL$, изображенных на рисунке 6.34, параллельны. При записи используйте обозначения.

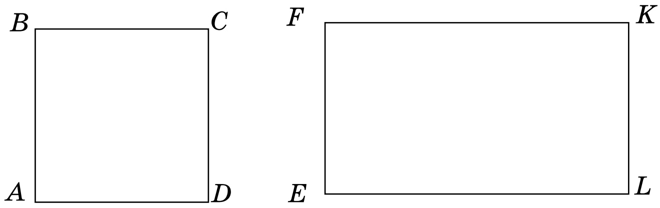


Рис. 6.34

1059. Проведите произвольную прямую a. С помощью линейки и чертежного треугольника постройте две прямые, параллельные прямой a.

1060. Проведите в тетради прямую a.
1) Выберите вне прямой a точку E (рис. 6.35).
2) Через точку E проведите прямую, параллельную данной.

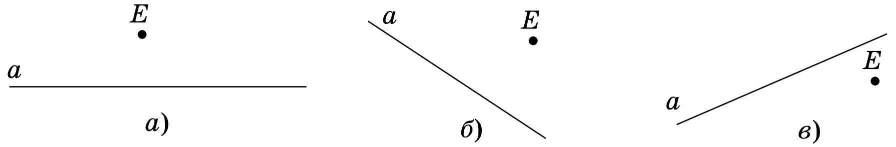


Рис. 6.35

1061. Проведите в тетради прямую s. Вне прямой s выберите точки A и B (рис. 6.36).
1) Через точку A проведите к прямой s перпендикулярную прямую k.
2) Через точку B проведите к прямой s перпендикулярную прямую l.
Параллельны ли прямые k и l? Сделайте соответствующие записи, используя знак $\parallel$.

1062. Через точку A, не лежащую на прямой s, проведены прямые k, l и t (рис. 6.37). Какая из этих прямых: k, l или t перпендикулярна прямой s, а какая – параллельна ей? Запишите их с обозначениями.

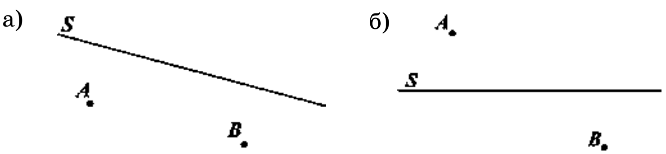


Рис. 6.36

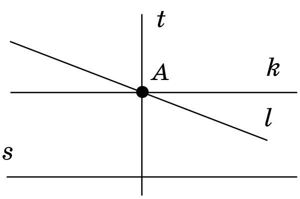


Рис. 6.37

1063. На рисунке 6.38 изображены параллельные прямые a и b. Найдите расстояние между этими прямыми.

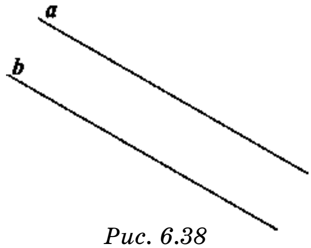


Рис. 6.38

1064. Масса деревянного куба с ребром 10 см равна 700 г. Его распилили на кубики с ребром 2 см.

- Сколько кубиков с ребром 2 см получилось?
- Какова масса одного кубика с ребром 2 см?

1065. Решите неравенства:

1) $3x - 1{,}8 < 4{,}2$;

2) $2{,}5 + \frac{3}{8}x > x$;

3) $0{,}6x + 7 < x + 9$;

4) $\frac{5}{6}x - \frac{1}{4} > x + 0{,}75$.

В

1066. Запишите, какие стороны многоугольников (рис. 6.39) параллельны (если такие есть).

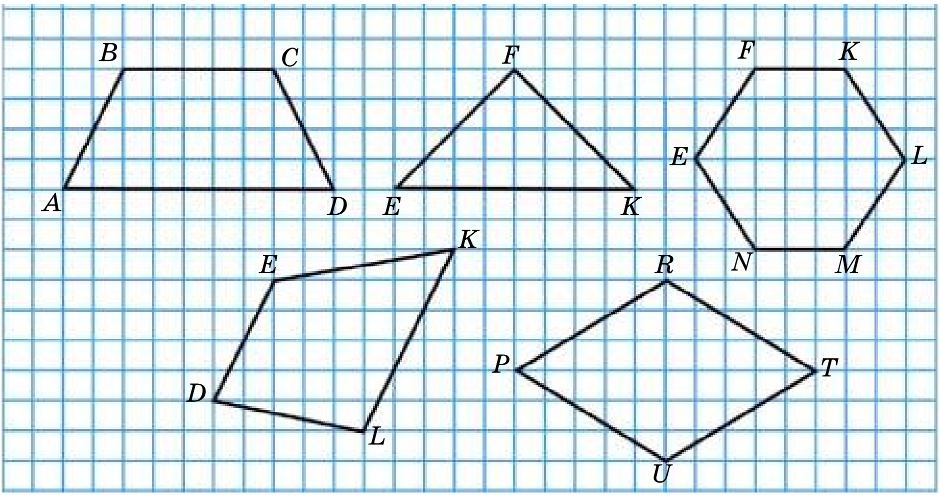


Рис. 6.39

1067. Начертите четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны и углы прямые. Расстояния между параллельными сторонами равны 7 см и 3 см. Найдите периметр четырехугольника.

1068. Начертите в тетради треугольник ABC. На стороне AB отметьте точки E и K. Через точки E и K параллельно стороне AC проведите отрезки EN и KL. Сколько получилось треугольников? Запишите параллельные стороны треугольников. Используйте обозначения при записи.

1069. Начертите острый угол DEF. На стороне EF отметьте точку N и проведите через нее прямую:
1) параллельную стороне ED;
2) перпендикулярную стороне EF.

1070. Имея два ведра емкостью 10 л и 7 л, как можно принести из реки 8 л воды?

1071. Решите уравнения:

1) $|2x-5|=9$; 3) $|0,4x-1|=2,2$; 5) $|2,5x-3|=7$;

2) $|0,6+x|=7$; 4) $|0,5x+3|=5$; 6) $|0,2x+7|=8$.

C

1072. На рисунке 6.40 изображены прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и прямая призма $ELPE_1L_1P_1$. Запишите, какие ребра этих фигур параллельны.

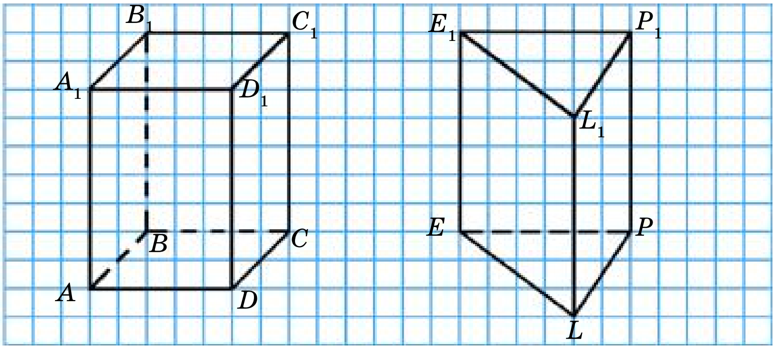


Рис. 6.40

1073. Дан треугольник ABC. Через вершину A проведите прямую, параллельную стороне BC, через вершину B – прямую, параллельную стороне AC, через вершину C – прямую, параллельную стороне AB. Сколько попарно параллельных отрезков получилось? Запишите их. Сколько треугольников получилось?

1074. Даны параллельные прямые m и n. Точка E удалена от прямой m на расстояние 1 см, а от прямой n – на расстояние 3 см. На каком расстоянии друг от друга находятся параллельные прямые m и n? Сколько решений имеет задача?

1075*. Площади двух треугольников относятся как $\frac{3}{7} : \frac{2}{3}$. Площадь второго треугольника на 35 см^2 больше, чем площадь первого. Найдите площадь каждого треугольника.

1076. Вычислите:

$$\frac{\left(2\frac{5}{7} - 1\frac{3}{5}\right) : 1,3 - 1\frac{3}{7} \cdot 0,25}{\left(\frac{2}{5} - \frac{7}{18}\right) \cdot 15}.$$

Ключевые факты.

Параллельные прямые. Параллельные отрезки.

1. Две прямые *AB* и *CD*, лежащие в одной плоскости и не имеющие ни одной общей точки (не пересекающиеся), называются параллельными (рис. 1). Обозначают: $AB \parallel CD$.

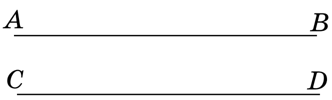


Рис. 1

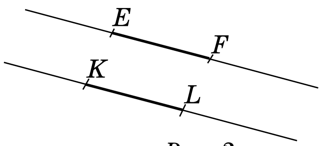


Рис. 2

2. Два отрезка называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых. $EF \parallel KL$ (рис. 2).

3. Если две прямые перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны (рис. 3).

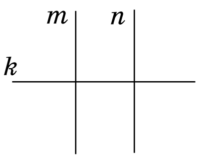
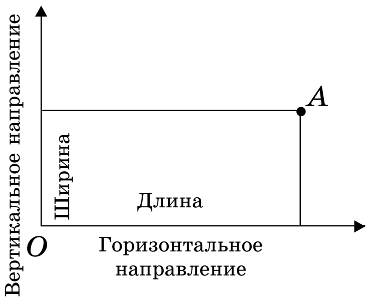


Рис. 3

Если $m \perp k$ и $n \perp k$, то $m \parallel n$.

1064. Масса одного кубика равна 5,6 г. **1065.** 1) $x < 2$; 2) $x < 4$; 4) $x < -6$. **1067.** 20 см. **1071.** 1) -2; 7; 2) $-7,6$; 6,4. **1074.** Задача имеет два решения: 4 см и 2 см. **1075.** 63 см^2; 98 см^2. **1076.** 3.

Прямоугольник расположен на плоскости так, что его длина совпадает с горизонтальным направлением, а ширина – с вертикальным. Значит, чтобы найти измерения тела на плоскости, надо знать перемещение от точки O (начала отсчета) в горизонтальном и вертикальном направлениях. Как вы думаете, сколько чисел определяют местонахождение точки A на плоскости?



6.4. Прямоугольная система координат. Координатная плоскость

Нам известно, что положение точки на координатной прямой определяется только одним числом – ее координатой. Теперь научимся определять положение точки на плоскости.

Например, чтобы определить, на каком месте находится твоя парта в классе, нужно знать номер ряда и порядковый номер парты в ряду. Значит, местоположение твоей парты в классе определяется двумя числами.

Вы знаете из курса географии, что местонахождение каждого города на Земле определяется двумя числами: широтой и долготой. Например, город Астана расположен на 51° северной широты и на 71° восточной долготы.

В некоторых научных исследованиях размеры тела не учитываются, а само тело рассматривают как точку. Поэтому тело на плоскости изображается точкой, а положение точки на плоскости определяется двумя числами.

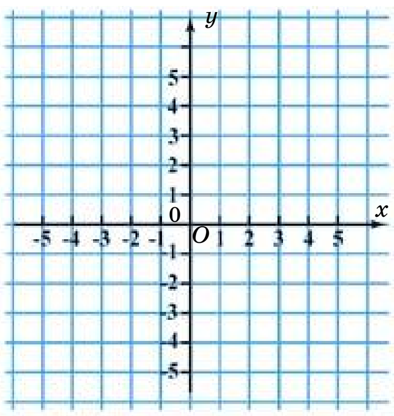


Рис. 6.41

Чтобы определить положение точки на плоскости, проведем две перпендикулярные координатные прямые, пересекающиеся в точке O – начале отсчета. Эти координатные прямые образуют прямоугольную систему координат на плоскости (рис. 6.41).

Две перпендикулярные координатные прямые, имеющие одинаковые единичные отрезки и пересекающиеся в точке, которая является началом отсчета для каждой из них, называют *прямоугольной системой координат*.

Такая система названа декартовой системой координат в честь французского философа и математика Рене Декарта (1596–1650).

Плоскость, на которой задана система координат, называется *координатной плоскостью*.

Термин «координата» (от латинского *coordinatus*) означает «упорядоченный». Координатные прямые называются ***координатными осями***.

Горизонтальная координатная прямая называется ***осью абсцисс*** (Ox). Координата точки на оси абсцисс обозначается буквой x.

Вертикальная координатная прямая называется *осью ординат* (Oy). Координата точки на оси ординат обозначается буквой y. Таким образом, x – абсцисса, а y – ордината точки.

Абсцисса и ордината вместе называются *координатами точки*.

Точка пересечения оси абсцисс с осью ординат называется *началом координат*. Начало координат обозначается буквой O. (Буква O является первой буквой латинского слова *origo* – «начало».)

Координаты точки записываются в скобках, при этом абсцисса всегда пишется на первом месте, а ордината – на втором.

Например, запись $D(2;\ 5)$ означает, что у точки D абсцисса равна 2, ордината – 5, читается: «Точка D с координатами 2 и 5».

I. Определение координат точки на координатной плоскости.

?

Задание. Пусть на координатной плоскости отмечена некоторая точка A (рис. 6.42). Найдите координаты ($x;\ y$) точки A.

Подсказка.

1. Из точки A проведем перпендикуляр на ось абсцисс. Запишем абсциссу основания этого перпендикуляра: $x =$.

Она и является абсциссой точки A.

2. Из точки A проведем перпендикуляр на ось ординат. Запишем ординату основания этого перпендикуляра: $y =$.

Она и является ординатой точки A.

3. Запишем с обозначением координаты точки A.

4. Вывод.

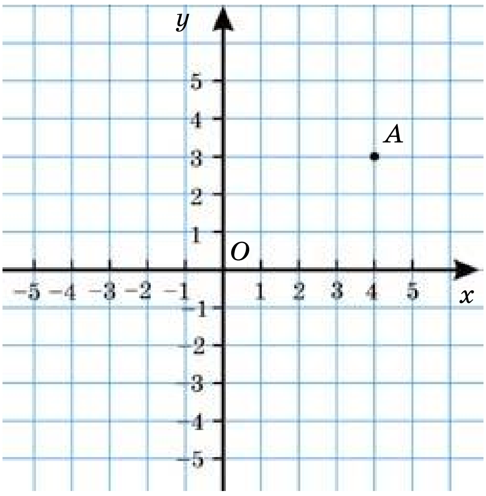


Рис. 6.42

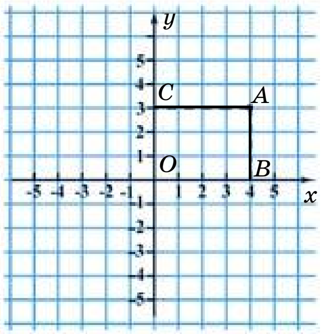


Рис. 6.43

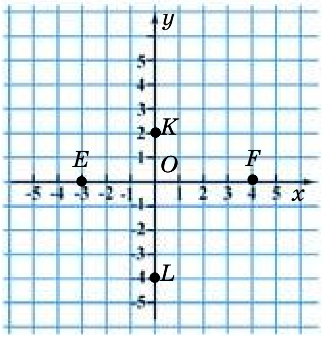


Рис. 6.44

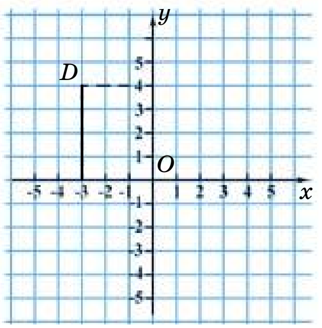


Рис. 6.45

Проверьте себя.

1. Абсцисса – основание перпендикуляра AB равна 4. $x = 4$ (рис. 6.43).
2. Ордината – основание перпендикуляра AC равна 3. $y = 3$.
3. $A(4;\ 3)$.
4. Вывод.

Каждой точке на координатной плоскости соответствует единственная упорядоченная пара чисел: ее абсцисса и ордината.

Если точка лежит на оси абсцисс (Ox), то ее ордината равна 0: $(x;\ 0)$ (рис. 6.44).

Например, $E(-3;\ 0)$; $F(4;\ 0)$.

Если точка лежит на оси ординат (Oy), то ее абсцисса равна 0: $(0;\ y)$.

Например, $K(0;\ 2)$; $L(0;\ -4)$.

II. Построение точки по ее координатам.

Построим на координатной плоскости точку $D(-3;\ 4)$. Для этого надо:

1. На оси абсцисс (Ox) отметить точку, имеющую координаты $x = -3$, $y = 0$, и провести через нее прямую, перпендикулярную оси абсцисс (рис. 6.45).

2. На оси ординат (Oy) отметить точку, имеющую координаты $x = 0$, $y = 4$, и провести через нее прямую, перпендикулярную оси ординат.

Точка пересечения перпендикулярных прямых – искомая точка $D(-3;\ 4)$.

3. Вывод.

Каждой упорядоченной паре чисел $(x;\ y)$ соответствует только одна точка на координатной плоскости.

Оси координат разбивают плоскость на четыре части, которые называются *координатными четвертями*. Порядковые номера координатных четвертей определяются против часовой стрелки. На рисунке 6.46 в каждой координатной четверти в скобках показаны сначала знаки абсцисс, а затем – знаки ординат.

Рис. 6.46

1) Что представляет собой прямоугольная система координат?
2) Как называются координаты точки на координатной плоскости?
3) Как найти координаты данной точки на координатной плоскости?
4) Как определить положение точки по ее координатам?

1077. Найдите (устно) все целые значения x, при которых верно неравенство:

1) $-3 < x < 1$; 3) $-9 \leqslant x < -6$; 5) $-4 \leqslant 2x \leqslant 4$;

2) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; 4) $10 < x \leqslant 14$; 6) $9 \leqslant 3x \leqslant 15$.

A

1078. Начертите прямоугольную систему координат и постройте точки с заданными координатами:

1) $x = 2$, $y = 3$; 3) $x = -4$, $y = -2$; 5) $x = -1$, $y = 0$;
2) $x = -3$, $y = 1$; 4) $x = 0$, $y = -3$; 6) $x = 0$, $y = 5$.

1079. Запишите координаты точек, изображенных на рисунке 6.47.

а) *б)*

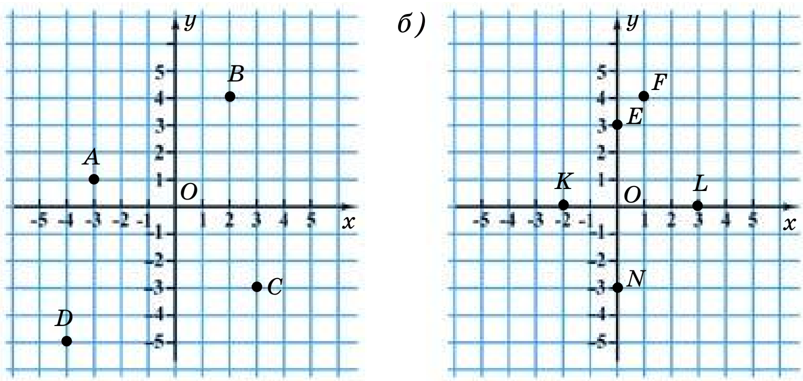


Рис. 6.47

1080. На координатной плоскости постройте точки:
$A(-2; 4)$, $B(-1; -3)$, $C(-1; 5)$; $D(1; -3)$; $E(-5; 2)$; $K(0; -1)$.

1081. Постройте отрезки AB, CD и EF, если их концы имеют координаты:

1) $A(3; 1)$, $B(-3; 3)$; 2) $C(-2; -3)$, $D(4; -1)$; 3) $E(1; 3)$, $F(3; -4)$.

1082. На координатной плоскости задана точка $A(3; 2)$. Найдите точку B, координаты которой противоположны координатам точки A. Постройте отрезок AB.

1083. На координатной плоскости отметьте точки $M(-2; -3)$, $N(2; 4)$; $K(-3; 4)$; $L(3; 1)$. Проведите отрезки MN и KL. Запишите координаты точки их пересечения.

1084. На координатной плоскости закрасьте множество точек (x, y), удовлетворяющих следующим условиям:

1) $y = 0$; $-2 \leqslant x \leqslant 5$ 3) $y = 2$; $-1 \leqslant x \leqslant 4$

2) $x = 0$; $-2 \leqslant y \leqslant 3$ 4) $x = 1$; $-2 \leqslant y \leqslant 2$.

1085. 1) Точки $B(x; 3)$ и $A(-2; 1)$ лежат на прямой, перпендикулярной оси абсцисс. Найдите x.

2) Точки $D(-2; y)$ и $C(3; 2)$ лежат на прямой, перпендикулярной оси ординат. Найдите y.

1086. Выполните действия:
1) $71{,}33 - 16{,}8 : (3{,}08 + 1{,}12)$;
2) $(0{,}62 + 0{,}56 - 0{,}29) \cdot (8{,}44 - 5{,}34)$;
3) $62{,}9 + (12{,}5 - 7{,}6 + 3{,}21) : 0{,}1$;
4) $(8{,}25 \cdot 0{,}1 - 0{,}025) \cdot (2{,}21 + 4{,}79) : 0{,}1$.

B

1087. 1) На координатной плоскости отметьте три любые точки, абсциссы которых равны числу 2. Запишите их с координатами.
2) На координатной плоскости отметьте три любые точки, ординаты которых равны числу 4. Запишите их с координатами.

1088. На координатной плоскости отметьте точки:
1) M $(6; -2)$; N $(-3; 4)$; 2) M $(-2; 2)$; N $(1; -4)$.
Проведите отрезок MN. Найдите координаты точки пересечения отрезка MN с осью ординат.

7–3451

1089. На координатной плоскости постройте:
1) треугольник по его вершинам: $A(-3; -1)$; $B(2; 4)$ и $C(6; -2)$;
2) прямоугольник по его вершинам: $A(-2; -2)$; $B(-2; 1)$; $C(4; 1)$ и $D(4; -2)$.

1090. На координатной плоскости даны три вершины квадрата $ABCD$: $A(-3; -2)$; $B(-3; 2)$; $C(1; 2)$. Найдите координаты четвертой вершины квадрата и постройте его.

1091. Вершина A прямоугольного треугольника ABC лежит в начале координат, а вершины B и C имеют координаты $B(0; 3)$; $C(6; 0)$. Единичный отрезок равен 1 см. Вычислите площадь треугольника ABC.

1092. Начертите отрезки AB и CD, если $A(-1; 6)$; $B(4; -4)$ и $C(4; 5)$; $D(-4; -3)$. Найдите:
1) Координаты точки E – пересечения отрезков AB и CD.
2) Координаты точки L – пересечения отрезка AB с осью Oy.
3) Координаты точки K – пересечения отрезка CD с осью Ox.

1093. Велосипедист, ехавший со скоростью 219,2 м/мин, решил догнать своего друга, который шел пешком и находился от него на расстоянии 452,1 м. Скорость пешехода была в 3,2 раза меньше скорости велосипедиста. Через какое время велосипедист догонит друга?

A. 3 мин; **B.** 4 мин; **C.** 3,5 мин; **D.** 2 мин.

1094. Решите уравнения:

1) $|x| + 4 = 7$; 2) $2|x + 6| = 30$; 3) $|x| - 8 = 3$; 4) $|4x - 7| + 6 = 11$.

C

1095. Кузнечик прыгает по координатной плоскости. Начиная от точки $A(1; -1)$, он прыгает на 3 единицы влево (на запад). Его каждый следующий прыжок на единицу длиннее предыдущего. Направление прыжка кузнечика меняется следующим образом: после запада – на север, затем на восток и потом на юг. Каковы координаты местоположения кузнечика после этих 4 прыжков?

1096. Определите координаты вершины D прямоугольника $ABCB$, если $A(-2; -2)$, $B(-2; 2)$ и $C(4; 2)$. Вычислите периметр данного прямоугольника. Единичный отрезок равен 1 см.

1097. Вершина E квадрата $EFMN$ лежит в начале координат, а вершины F и M имеют координаты $F(0; 4)$, $M(4; 4)$. Найдите координаты вершины N. Вычислите площадь квадрата $EFMN$. Единичный отрезок равен 1 см.

1098. Начертите лучи AB и CD, если $A(-7;\ 6)$; $B(-3;\ 4)$ и $C(7;\ 6)$; $D(4;\ 4)$. Найдите:
1) Координаты точки E – пересечения лучей AB и CD.
2) Координаты точки N – пересечения луча CD с осью абсцисс (Ox).

1099. На координатной плоскости закрасьте множество точек $(x;\ y)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам:
1) $-4 \leqslant x \leqslant 1;\ -3 \leqslant y \leqslant 2;$ 2) $2 \leqslant x \leqslant 5;\ 1 \leqslant y \leqslant 4.$

1100. На координатной плоскости постройте треугольник с вершинами $A(0;\ -2)$; $B(6;\ -2)$; $C(6;\ 4)$. Найдите площадь треугольника ABC. Единичный отрезок равен 1 см.

1101. Первый оператор на компьютере набирает рукопись за 9 ч, а второй – за 6 ч. После того как первый оператор проработал 3 ч, ему поручили другую работу. Оставшуюся часть рукописи набрал второй оператор. За сколько часов второй оператор набрал оставшуюся часть работы?

1102. Вычислите удобным способом:

1) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{4}}$; 2) $\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{2}{15}}{\frac{5}{12}-\frac{2}{5}}$; 3) $\dfrac{\frac{1}{6}-\frac{1}{10}}{\frac{5}{9}-\frac{7}{15}}$; 4) $\dfrac{\frac{5}{6}-\frac{1}{12}}{\frac{5}{36}+\frac{1}{9}}$.

Ключевые факты.

Прямоугольная система координат. Координатная плоскость.

Прямоугольная система координат – это две перпендикулярные координатные прямые, имеющие общее начало отсчета и одинаковые единичные отрезки (рис. 1).

Если на плоскости проведены оси координат (Ox и Oy), то данную плоскость называют *координатной плоскостью*.

Координата по оси Ox называется абсциссой, а координата по оси Oy – ординатой.

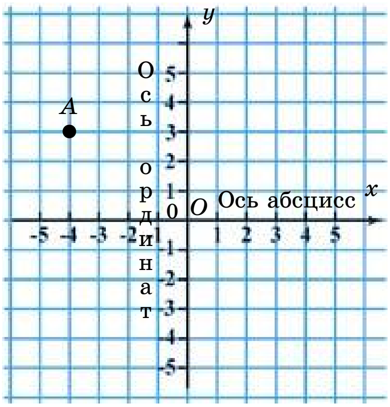


Рис. 1

Например, у точки A на рисунке 1 абсцисса равна -4, а ордината – 3. Пишут: $A(-4;\ 3)$. Читается: «Точка A с координатами -4 и 3».

1085. 1) $x = -2$; 2) $y = 2$. **1086.** 1) 67,33; 2) 2,759; 3) 144; 4) 56. **1090.** $D(1;\ -2)$. **1092.** 1) $E(1;\ 2)$; 2) $L(0;\ 4)$; 3) $K(-1;\ 0)$. **1094.** 2) -21; 9. 4) 0,5; 3. **1095.** $(3;\ -3)$. **1097.** $N(4;\ 0)$. 16 см^2. **1100.** 18 см^2. **1101.** За 4 часа. **1102.** 1) 2; 2) 7; 3) 0,75; 4) 3.

1) Начертите на листке прямую a и согните листок по этой прямой.
2) На внешней стороне согнутого листка нарисуйте половину любого орнамента (рис. 6.48).
3) Вырежьте ножницами рисунок, расправьте его по сгибу листка.
4) Какую фигуру вы вырезали?

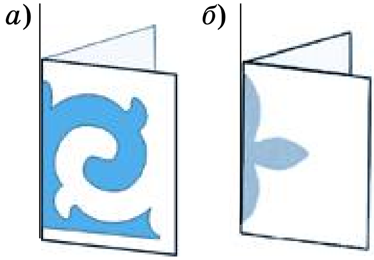


Рис. 6.48

6.5. Осевая симметрия

В природе, технике и быту встречаются случаи, когда части некоторых тел соразмерны между собой. Можно привести примеры насекомых, орнаментов, украшений (рис. 6.49).

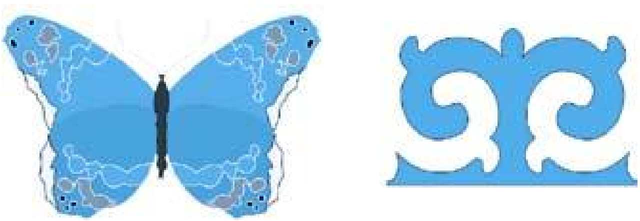


Рис. 6.49

В таких случаях мы часто встречаем выражения, что части тела – фигуры симметричные. Термин «симметрия» происходит от греческого слова *summetria*, что означает соразмерность, наличие определенного порядка в расположении частей.

Бывают различные виды симметрии. Самый простой вид симметрии – это симметрия относительно прямой. **Симметрия относительно прямой называется *осевой симметрией*.** Прямая, относительно которой данные фигуры симметричны, называют осью симметрии. На рисунке 6.50 изображены фигуры A и B, симметричные относительно прямой k.

Любая фигура состоит из точек. Поэтому, чтобы построить фигуры, симметричные относительно прямой, сначала научимся строить точки, симметричные относительно прямой.

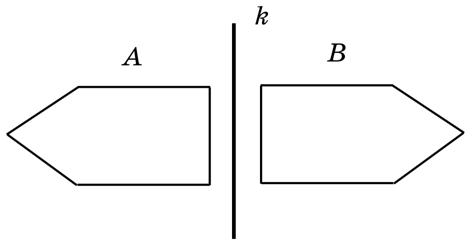


Рис. 6.50

? **Задание.** Пусть дана прямая k и точка A вне этой прямой (рис. 6.51). Постройте точку A_1, симметричную точке A относительно прямой k.

Подсказка.

1. Проведем через точку A прямую l, перпендикулярную прямой k. Точку пересечения прямых k и l обозначим буквой O.

2. Отметим на прямой l точку A_1, расположенную на таком же расстоянии от прямой k (от точки O), что и точка A.

Получим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой k.

Проверьте себя.

Дано:
Прямая k и точка A.

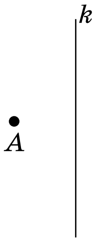
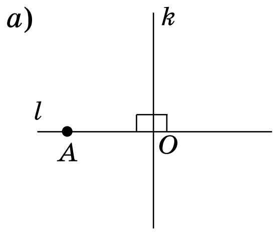
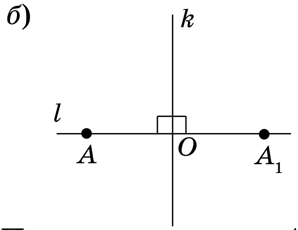


Рис. 6.51

1. Через точку A проведена прямая l, $l \perp k$.



2. На прямой l отложим отрезок OA_1, $OA = OA_1$.



Получим точку A_1, которая симметрична точке A относительно прямой k (рис. 6.52). *Прямую k называют осью симметрии точек A и A_1.*

Рис. 6.52

3. Вывод.

Точка A симметрична точке A_1 относительно прямой k, если отрезок AA_1 перпендикулярен прямой k и делится ею на две равные части. $AA_1 \perp k$ и $AO = OA_1$.

Любая точка, лежащая на оси симметрии, симметрична самой себе (рис. 6.53).

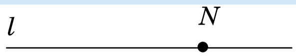


Рис. 6.53

В данном случае точка N симметрична самой себе относительно прямой l.

Симметричные точки обозначаются одинаковыми буквами, только под буквой ставится цифра (индекс).

Построим отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно прямой s (рис. 6.54).

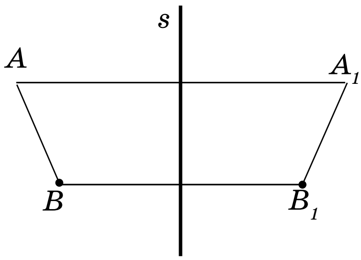


Рис. 6.54

Для этого надо:

1) построить точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B относительно прямой s;

2) соединив точки A_1 и B_1, построить отрезок A_1B_1.

Отрезок A_1B_1 симметричен отрезку AB относительно прямой s. Если согнуть плоскость по прямой s, то отрезки AB и A_1B_1 совместятся. Значит, $AB = A_1B_1$.

Две фигуры называются симметричными относительно некоторой прямой, если при перегибании плоскости чертежа по этой прямой они совмещаются.

На рисунке 6.55 изображены треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, симметричные относительно прямой s. Если перегнуть чертеж по этой прямой, то соответствующие вершины треугольников совпадут: вершина A – с вершиной A_1; вершина B – с вершиной B_1; вершина C – с вершиной C_1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ – равные треугольники.

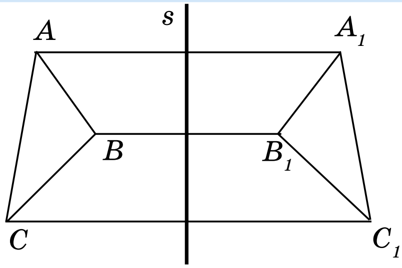


Рис. 6.55

Симметричные фигуры равны между собой.

Если прямая делит фигуру на две симметричные части, то фигуру называют *симметричной* относительно этой прямой. Прямую, относительно которой симметричны части фигуры, называют *осью симметрии фигуры*.

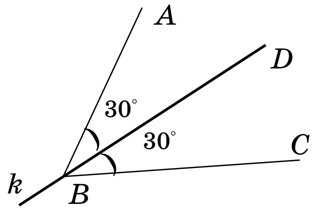


Рис. 6.56

Например, *угол – фигура симметричная* относительно прямой, на которой расположена биссектриса угла. Например, на рисунке 6.56 изображен угол ABC. Сторона AB угла ABC симметрична стороне BC относительно прямой k. Прямая k является осью симметрии угла ABC.

Прямоугольник имеет две оси симметрии – это прямые s и t, проходящие через середины противоположных сторон (рис. 6.57, *а*).

Квадрат имеет четыре оси симметрии (рис. 6.57, *б*).

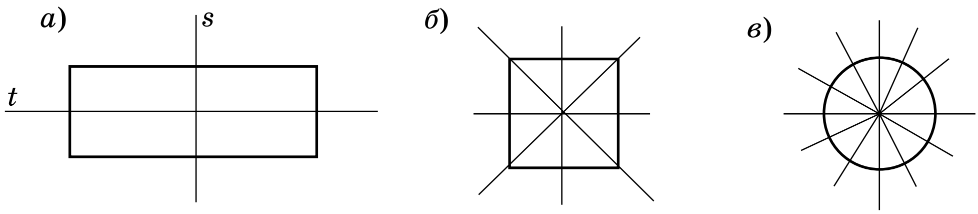


Рис. 6.57

Окружность имеет бесконечное множество осей симметрии (рис. 6.57, *в*). Любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии.

Значит, угол, прямоугольник, квадрат и окружность – фигуры симметричные.

1. Какие фигуры называются симметричными относительно прямой?
2. Какие фигуры называются симметричными относительно оси симметрии?
3. Приведите примеры фигур с осью симметрии.
4. Сколько осей симметрии имеет прямоугольник? окружность?

1103. Градусная мера угла ABC равна 80°. Лучи BD и BE, проведенные из вершины B, образуют углы $\angle ABD = 30^\circ$ и $\angle ABE = 40^\circ$. Какой из лучей, BD или BE, лежит на оси симметрии угла ABC? (Устно.)

А

1104. Из данных фигур, изображенных на рисунке 6.58, выберите фигуры, имеющие ось симметрии. Перерисуйте их в тетрадь и проведите оси симметрии.

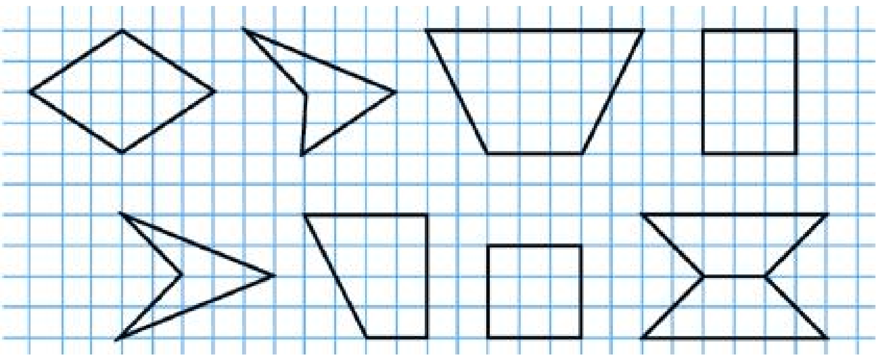


Рис. 6.58

1105. Обозначьте в тетради точки A и A_1 так, как указано на рисунке 6.59 (*а, б, в*). Начертите прямую k так, чтобы точки A и A_1 были симметричными.

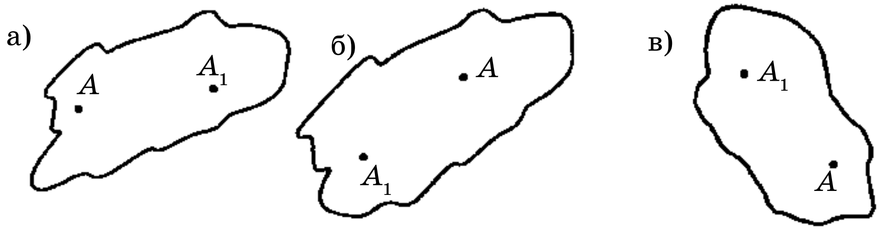


Рис. 6.59

1106. Начертите в тетради отрезок KL и прямую a, как показано на рисунке 6.60 (*а, б, в*). Начертите отрезок K_1L_1, симметричный отрезку KL относительно прямой a.

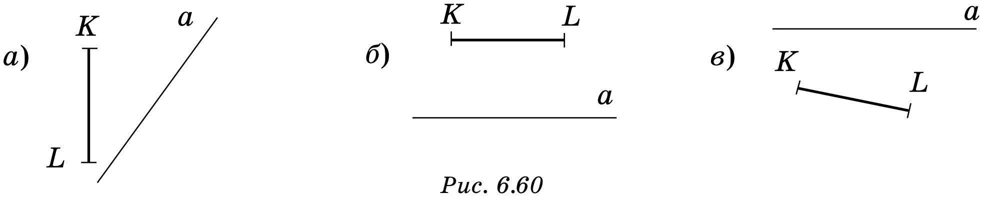


Рис. 6.60

1107. Отметьте на координатной плоскости точки, симметричные точке $A(3;\ 5)$ относительно:
1) оси абсцисс;
2) оси ординат.
Запишите координаты полученных точек.

1108. Начертите оси симметрии квадрата со стороной 4 см. На сколько равных треугольников делится квадрат его осями симметрии? Найдите площадь одного треугольника.

1109. На координатной плоскости постройте отрезок AB, концами которого являются точки $A(-3;\ 2)$ и $B(2;\ 5)$. Постройте отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно оси абсцисс. Запишите координаты точек A_1 и B_1.

1110. Найдите значение выражений:

1) $\dfrac{x-9}{4}+2$ при $x=-7$; 3) $\dfrac{7-2x}{3}+6$ при $=-4$;

2) $\dfrac{3x+4}{2}-8$ при $x=6$; 4) $10-\dfrac{8x+9}{7}$ при $x=5$.

B

1111. Перерисуйте в тетрадь рисунок 6.61. Постройте точки, симметричные точкам A, B и C относительно прямой l. Сколько точек построили?

1112. Постройте прямую l, относительно которой прямая m симметрична прямой n (рис. 6.62, *а*, *б*).

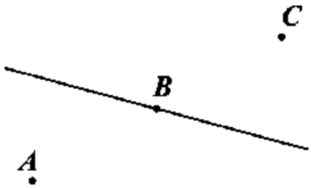


Рис. 6.61

1113. Прямые AB и CD пересекаются в точке O (рис. 6.63). Прямая k – ось симметрии вертикальных углов AOD и COB. Точка E лежит на прямой k. Градусная мера угла COE равна 30°. Найдите градусную меру угла AOD.

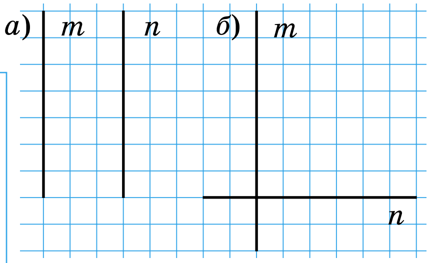


Рис. 6.62

1114. На плоскости даны пересекающиеся прямые a и b. Девять точек расположены симметрично относительно прямых a и b. Докажите, что одна из этих точек лежит на пересечении прямых a и b.

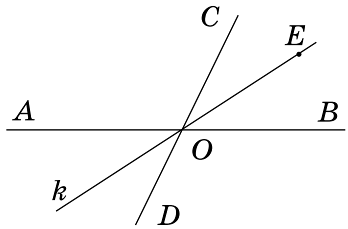


Рис. 6.63

1115. Постройте на координатной плоскости треугольник ABC, у которого $A(-4;\ 1)$; $B(-2;\ 5)$; $C(5;\ 3)$. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, симметричный треугольнику ABC относительно оси абсцисс.

1116. На координатной плоскости постройте отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно оси ординат. Постройте отрезок A_2B_2, симметричный отрезку AB относительно оси абсцисс, запишите координаты их концов (рис. 6.64).

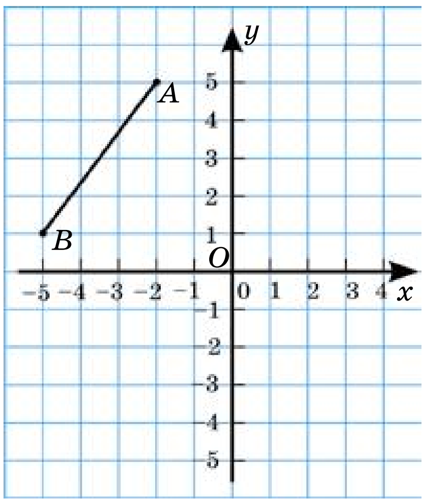


Рис. 6.64

1117. Прямые k и l – оси симметрии прямоугольника $ABCD$ (рис. 6.65). Вершина A прямоугольника $ABCD$ расположена на расстоянии 3 см от оси симметрии l и на расстоянии 2 см от оси симметрии k.
Найдите:
1) периметр прямоугольника $ABCD$;
2) площадь прямоугольника $ABCD$.

1118. Из 10 кг пшеницы получается 8 кг муки, а из 2 кг муки – 3 кг хлеба.

Сколько килограммов хлеба получается из 150 кг пшеницы?

A. 170 кг; **B.** 180 кг; **C.** 190 кг; **D.** 200 кг.

C

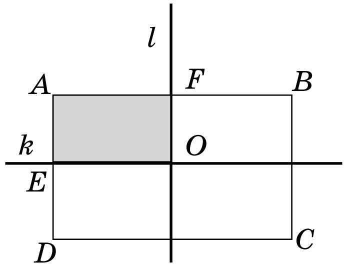


Рис. 6.65

1119. Из данных фигур (рис. 6.66) выберите те, которые имеют ось симметрии, и перечертите их в тетрадь. Проведите оси симметрии.

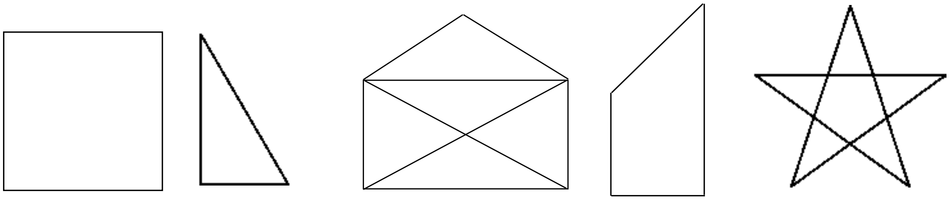


Рис. 6.66

1120. На рисунке 6.67 биссектрисы углов треугольника ABC – лучи k, s, t делят углы A, B и C на части, градусные меры которых 50°; 25°; 15°. Сколько градусов составляет сумма градусных мер углов A, B и C?

1121. Даны 5 точек на плоскости, которые симметричны относительно прямой a. Докажите, что хотя бы одна точка лежит на оси симметрии.

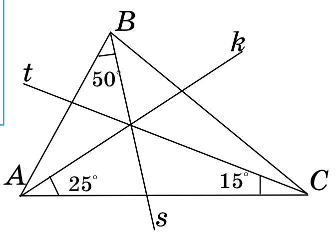


Рис. 6.67

1122. Прямые EF и KL пересекаются в точке O. $\angle FOL = 120^\circ$. Луч OC – биссектриса угла EOL, а луч OD – биссектриса угла FOL. Найдите градусную меру угла COD (рис. 6.68).

1123. У квадрата $ABCD$ вершина A $(-2;\ 1)$ симметрична вершине D, а вершина B $(-2;\ 5)$ – вершине C относительно оси ординат. На координатной плоскости постройте квадрат $ABCD$. Найдите координаты точки E, в которой пересекаются все оси симметрии квадрата $ABCD$.

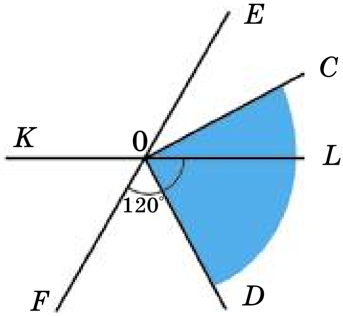


Рис. 6.68

1124. Перерисуйте в тетради по клеточкам фигуру $ABCD$, которая изображена на рисунке 6.69.

1) Найдите ось симметрии фигуры $ABCD$.
2) Вычислите площадь фигуры $ABCD$ в квадратных сантиметрах.

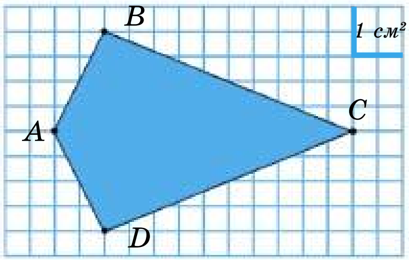


Рис. 6.69

1125. Цена компьютера снизилась на $\frac{1}{5}$ его первоначальной цены. Во сколько раз прежняя цена больше новой?

A. В 1,2 раза; **B.** В 1,3 раза; **C.** В 1,25 раз; **D.** В 1,1 раза.

1126. Вычислите: $\dfrac{5+\dfrac{3-\dfrac{3}{4}}{3}}{2+\dfrac{7}{8}}+\dfrac{2\dfrac{11}{15}-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{9}{\dfrac{1}{12}+\dfrac{2}{3}}}$.

Ключевые факты.

Осевая симметрия.

I. Если две различные фигуры F и F_1 (рис. 1) при перегибании плоскости чертежа по некоторой прямой l совмещаются, то такие фигуры называются *симметричными* относительно прямой l.

При этом прямая l называется *осью симметрии*.

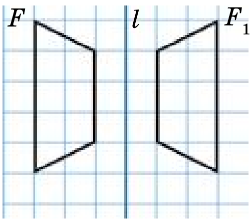


Рис. 1

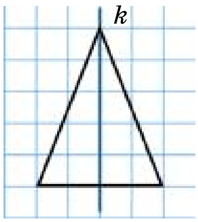


Рис. 2

II. Фигура называется *симметричной* относительно прямой k, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой k также принадлежит этой фигуре (рис. 2). Прямая k называется осью симметрии фигуры.

1108. 2 см^2. **1113.** 60°. **1117.** 1) 20 см; 2) 24 см^2. **1122.** $\angle COD = 90°$. **1123.** E (0; 3). **1124.** 2) 12 см^2. **1126.** 2,2.

1) Начертите прямоугольную систему координат и отметьте на ней точки: $A(-3;\ 0)$, $A_1(3;\ 0)$. Найдите середину отрезка AA_1. Будут ли точки A и A_1 симметричны относительно точки O?
2) Найдите точку, симметричную точке $B(-5;\ 0)$ относительно точки O, и запишите ее координаты.

6.6. Центральная симметрия

Второй вид симметрии на плоскости – симметрия относительно точки.

Симметрия относительно точки называется центральной симметрией, а сама точка – центром симметрии.

I. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно точки O (рис. 6.70, *а*).

Для этого:

1) через данные точки A и O (рис. 6.70, *а*) проведем прямую k (рис. 6.70, *б*);

2) по другую сторону от точки O отложим отрезок OA_1, равный отрезку AO (рис. 6.70, *в*). $OA_1 = OA$.

Точка A_1 симметрична точке A относительно точки O.

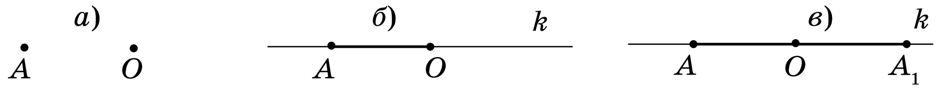


Рис. 6.70

Точка O – центр симметрии точек A и A_1.

Если точка O является серединой отрезка AA_1, то точки A и A_1 называются симметричными относительно точки O.

II. Построим отрезок, симметричный отрезку AB относительно точки O (рис. 6.71).

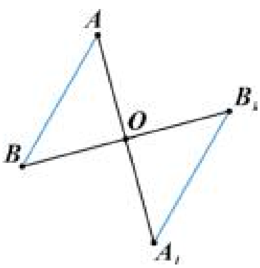


Рис. 6.71

Для этого надо:

1) построить точку A_1, симметричную точке A относительно точки O, и точку B_1, симметричную точке B относительно точки O;

2) соединив точки A_1 и B_1, получим отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно точки O.

$AB = A_1B_1$.

III. Построим треугольник $A_1B_1C_1$, симметричный треугольнику ABC относительно точки O (рис. 6.72). Для этого надо построить точки A_1, B_1 и C_1, симметричные точкам A, B, C относительно точки O, и соответственно соединить их отрезками.

Получим треугольник $A_1 B_1 C_1$, симметричный треугольнику ABC относительно точки O.

Центральная симметрия является частным случаем поворота, когда угол поворота равен 180°.

Центрально-симметричные фигуры при повороте одной из них вокруг центра на 180° совместятся всеми своими точками.

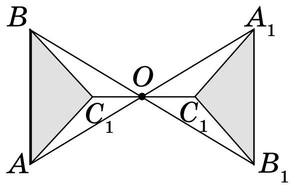


Рис. 6.72

Центрально-симметричные фигуры равны.

Существуют центрально-симметричные фигуры, в которых точка O – центр симметрии, а симметричные точки также принадлежат самой фигуре.

Например, отрезок, окружность, квадрат и т.д.

Фигура называется *центрально-симметричной* относительно точки O, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка (относительно точки O) также принадлежит этой фигуре.

Точка O называется центром симметрии фигуры.

Окружность – центрально-симметричная фигура (рис. 6.73).

Любые точки, лежащие на концах диаметра окружности, симметрич-ны относительно ее центра. Точки X, Y, Z, ... симметричны точкам X_1, $У_1$, Z_1, ... относительно точки O. Точка O – центр симметрии окружности.

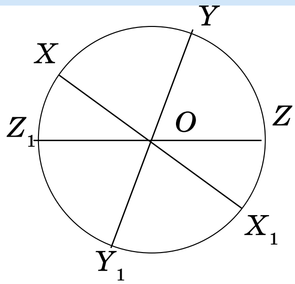


Рис. 6.73

Прямая – центрально-симметричная фигура.

Любая точка прямой является ее центром симметрии.

Отрезок – центрально-симметричная фигура.

Точка O – центр симметрии отрезка AB. Она делит его на две равные части ($AO = OB$) (рис. 6.74).

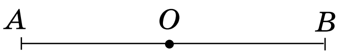


Рис. 6.74

Прямоугольник – центрально-симметричная фигура.

Точка пересечения диагоналей (AC и BD) – точка O является его центром симметрии (рис. 6.75).

Рассмотрим на координатной плоскости точки, симметричные относительно точки O – начала координат (рис. 6.76).

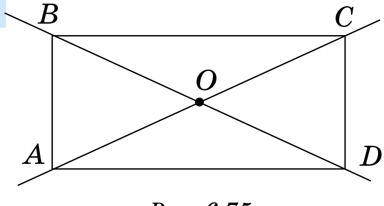


Рис. 6.75

На координатной плоскости точка $A(3;\ 5)$ симметрична точке $A_1(-3;\ -5)$, а точка $B(-5;\ 7)$ симметрична точке $B_1(5;\ -7)$ относительно точки O – начала координат.

На координатной плоскости координаты точек, симметричных относительно точки O – начала координат, являются противоположными числами.

1. Какие две точки называются симметричными относительно данной точки O?
2. Какие фигуры называются центрально-симметричными? Приведите примеры.
3. Где находится центр симметрии отрезка, прямоугольника и окружности?

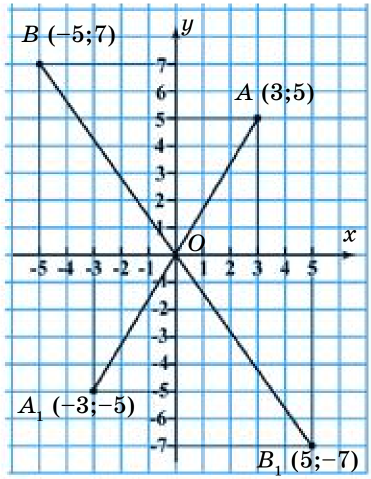


Рис. 6.76

1127. Где расположен центр симметрии фигуры, если этой фигурой является: 1) отрезок; 2) прямая; 3) прямоугольник?

1128. Среди данных фигур найдите те, которые имеют центр симметрии. Перечертите их в тетрадь, обозначьте буквой центр симметрии (рис. 6.77).

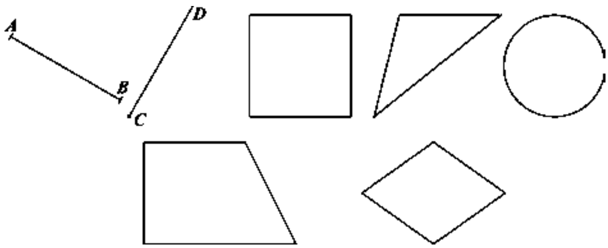


Рис. 6.77

1129. Перечертите рисунок 6.78 в тетрадь. На координатной плоскости постройте отрезок, симметричный данному отрезку AB относительно точки O – начала координат. Найдите координаты концов построенного отрезка и запишите их.

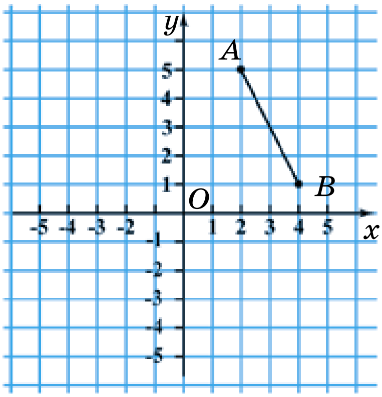


Рис. 6.78

1130. Скопируйте рисунок 6.79 в тетрадь и постройте: 1) отрезок; 2) треугольник; 3) окружность, симметричные данным относительно точки D.

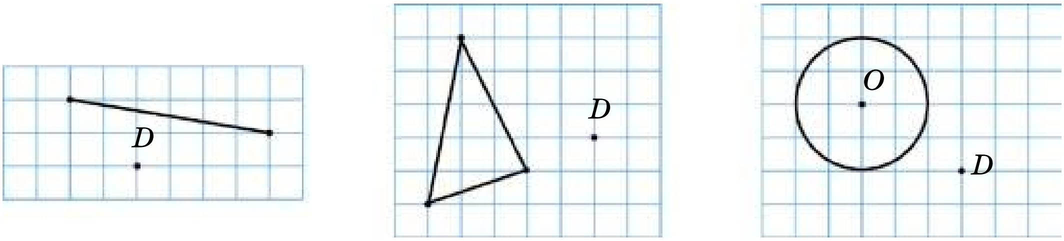


Рис. 6.79

1131. На координатной прямой точки A и A_1 симметричны относительно точки $P(1)$. Найдите координату точки A_1, если:
1) $A(3)$; 3) $A(-4)$;
2) $A(-2)$; 4) $A(5)$.

B

1132. На рисунке 6.80 изображена часть центрально-симметричной фигуры, центром которой является точка L. Перенесите рисунок в тетрадь и достройте фигуру.

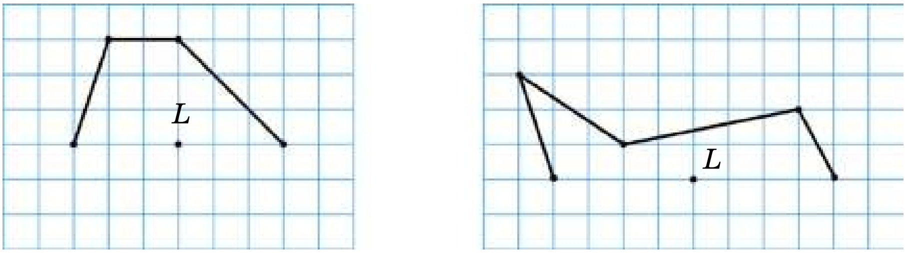


Рис. 6.80

1133. Какие из данных точек симметричны относительно точки O (рис. 6.81)? Запишите пары симметричных точек с их координатами.

1134. На координатной прямой изображены точки:
1) $A(-5)$; $B(3)$; 3) $E(-4)$; $F(6)$;
2) $C(-1)$; $D(5)$; 4) $K(-3)$; $L(1)$,
которые симметричны относительно точки P. Найдите координату точки P.

1135. На координатной плоскости постройте треугольник, симмет-

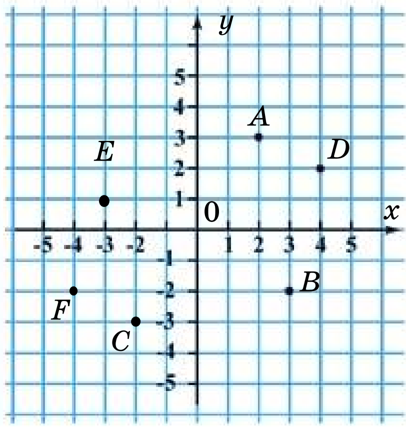


Рис. 6.81

ричный треугольнику ABC относительно точки O (рис. 6.82). Запишите координаты вершин полученного треугольника.

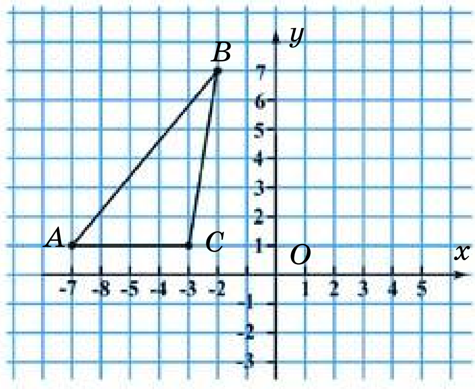


Рис. 6.82

1136. В классе 24 учащихся. Из них 12 учащихся посещают кружок английского языка, 10 – кружок китайского языка, а 5 учащихся не посещают никакой кружок. Сколько учащихся посещают кружки и английского языка, и китайского? Решение изобразите с помощью кругов Эйлера–Венна.

C

1137. На координатной плоскости точка $A(-3; 1)$ – вершина прямоугольника $ABCD$, точка $E(2; 3)$ – его центр симметрии. Запишите координаты вершин B, C и D. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$. Длину клетки тетради (единичного отрезка) примите за 1 см.

1138. Периметр прямоугольника равен 28 см. Расстояние между вершиной A и его центром симметрии – точкой O равно 5 см. Найдите периметр треугольника ABC.

A. 35 см; **B.** 30 см; **C.** 24 см; **D.** 26 см.

1139. На координатной плоскости точка $E(x; -3)$ симметрична точке $F(2; y)$ относительно точки O – начала координат. Найдите значения x и y.

1140. На координатной плоскости:
1) точка $A(x; -4)$ симметрична точке $B(4; y)$ относительно точки $E(0; -2)$;
2) точка $C(x; -2)$ симметрична точке $B(4; y)$ относительно точки $K(-1; 0)$.
Найдите значения x и y.

1141. Смешали три раствора сиропа. В первом растворе массой 200 г содержится 10% сахара. Во втором растворе массой 800 г – 20% сахара. В третьем растворе массой 500 г – 24% сахара. Сколько процентов сахара содержится в полученном смешанном растворе?

1142. Вычислите:

$$\frac{\left(9\frac{1}{4}-2\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{2}{3}}{\left(5\frac{3}{8}-\frac{2}{3}\right):11,3}+\frac{\frac{3}{5}\cdot 1,35:0,9}{0,72-\frac{3}{25}}+0,1.$$

Ключевые факты.

Центральная симметрия.

Фигуры, симметричные относительно какой-либо точки, называют *центрально-симметричными фигурами*.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ центрально-симметричны относительно точки O. Точка O – центр симметрии (рис. 1).

Если точка O и симметричные относительно ее точки также принадлежат самой фигуре, то фигура называется центрально-симметричной (рис. 2). Точка O называется *центром симметрии* фигуры.

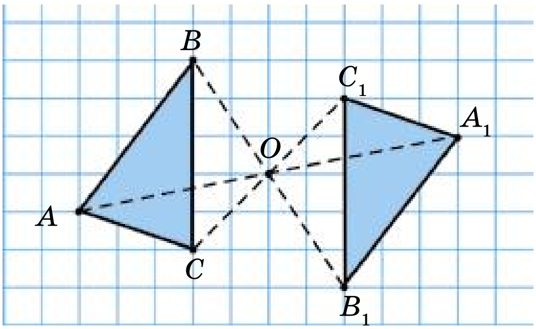


Рис. 1

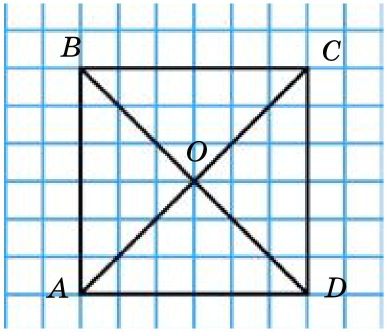


Рис. 2

Например, квадрат – центрально-симметричная фигура.

Точка пересечения диагоналей квадрата (AC и BD) – точка O – является его центром симметрии.

▲ **1131.** 1) $A_1(-1)$; 3) $A_1(6)$. **1134.** 1) $P(-1)$; 2) $P(2)$. **1136.** 3 ученика. **1137.** 40 см^2. **1139.** $x = -2$; $y = 3$. **1141.** 20%. **1142.** 13.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

A

1143. Проведите прямую k. Отметьте точку A вне прямой k. Через точку A проведите прямую l, параллельную прямой k.

1144. На рисунке 6.83 прямые EF и KL перпендикулярны. $\angle AOK = 40^\circ$; $\angle BOL = 60^\circ$. Найдите градусные меры углов AOE и BOF.

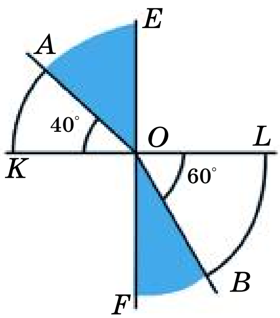


Рис. 6.83

1145. На координатной плоскости постройте треугольник по его вершинам: $A(-3;\ 2)$, $B(2;\ 3)$ и $C(3;\ -2)$.

B

1146. К прямой AB проведен перпендикуляр OF. $\angle COD = 100^\circ$ и $\angle AOC = 50^\circ$. Найдите градусные меры углов BOD и DOF (рис. 6.84).

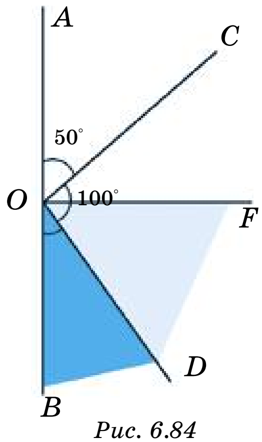


Рис. 6.84

1147. На координатной плоскости начертите отрезок AB, концами которого являются точки $A(-5;\ 3)$ и $B(2;\ 3)$. Постройте отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно точки $E(-2;\ 1)$, и запишите координаты точек A_1 и B_1.

1148. На координатной плоскости постройте квадрат $ABCD$ с вершиной в точке $A(-2;\ 4)$ и центром симметрии в точке $E(1;\ 1)$. Запишите координаты его вершин B, C и D.

C

1149. Периметр треугольника ABO равен 12 см. Треугольник A_1B_1O симметричен треугольнику ABO относительно точки O, причем $A_1B_1 = 3$ см и $OB_1 = 4$ см. Чему равна длина стороны OA треугольника ABO?

1150. На координатной плоскости закрасьте (укажите) множество точек $B(x;\ y)$, удовлетворяющих неравенствам:

1) $-2 \leqslant x \leqslant 4$ и $-3 \leqslant y \leqslant 1$; 2) $2 \leqslant x \leqslant 7$ и $-2 \leqslant y \leqslant 3$.

1151. На координатной плоскости даны три вершины квадрата $ABCD$: $A(-8;\ 2)$, $B(-2;\ 2)$ и $C(-2;\ -4)$.
1) Найдите координаты четвертой вершины D.
2) Постройте квадрат $A_1B_1C_1D_1$, симметричный квадрату $ABCD$ относительно оси ординат. Найдите точку F – центр симметрии квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Запишите координаты точки F.

1144. 50°; 30°. **1146.** $\angle BOD = 30^\circ$; $\angle DOF = 60^\circ$. **1151.** 1) $D\ (-8;\ -4)$; 2) $F(5;\ -1)$.

Глава VII. ФИГУРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

7.1. Расположение фигур в пространстве. Изображение пространственных фигур. Невидимые линии

До сих пор мы изучали треугольники, прямоугольники и круги, то есть такие фигуры, все точки которых расположены на плоскости. Эти фигуры называют *плоскими фигурами*.

Среди предметов окружающего нас мира имеются как плоские, так и пространственные фигуры.

Мы рассмотрим *пространственные фигуры:* прямоугольный параллелепипед, куб, пирамиду, цилиндр, шар, конус (рис. 7.1).

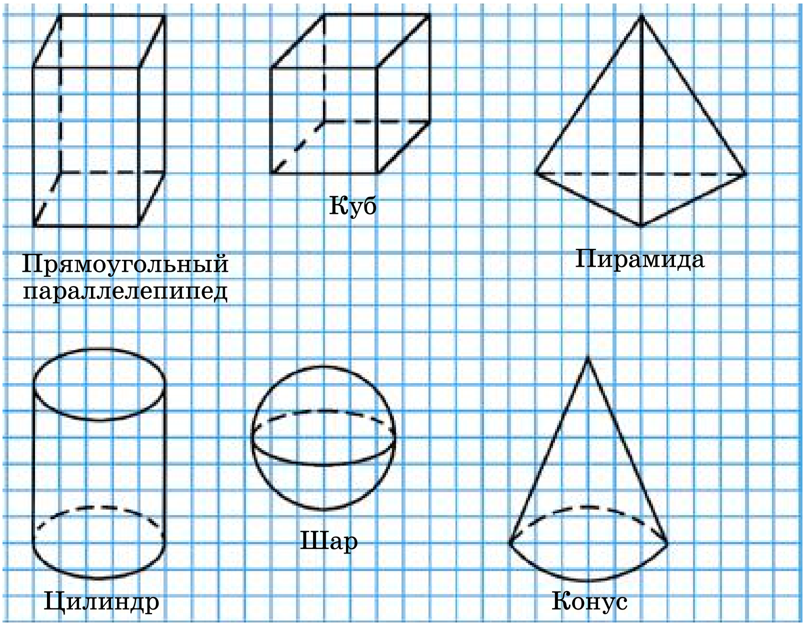


Рис. 7.1

Пространственные фигуры также называют *геометрическими телами*.

Геометрическое тело представляет собой часть пространства, ограниченного замкнутой поверхностью.

При изображении геометрических тел возникают некоторые проблемы, так как изображение пространственной фигуры на плоскости не всегда совпадает с ее реальной формой.

Поэтому рассмотрим некоторые правила, позволяющие приблизить изображение пространственной фигуры к ее реально воспринимаемому образу.

Основные правила изображения пространственных фигур на плоскости:

1. Сохраняется параллельность прямых и отрезков.
2. Сохраняется отношение длин параллельных отрезков.
3. Градусные меры углов при изображении не сохраняются.
4. Все видимые линии изображаются сплошными.
5. Невидимые линии (скрытые от глаз наблюдателя) изображаются пунктирными (штриховыми) линиями.

Рассмотрим изображение некоторых геометрических тел.

1. Изображение прямоугольного параллелепипеда.

Нам известно, что поверхность прямоугольного параллелепипеда состоит из 6 прямоугольников (рис. 7.2). У прямоугольного параллелепипеда 8 вершин, 12 ребер и 6 граней.

На рисунках 7.3, *а*, *б*, *в*, *г* изображено построение прямоугольного параллелепипеда.

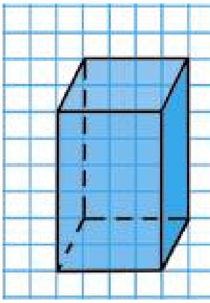


Рис. 7.2

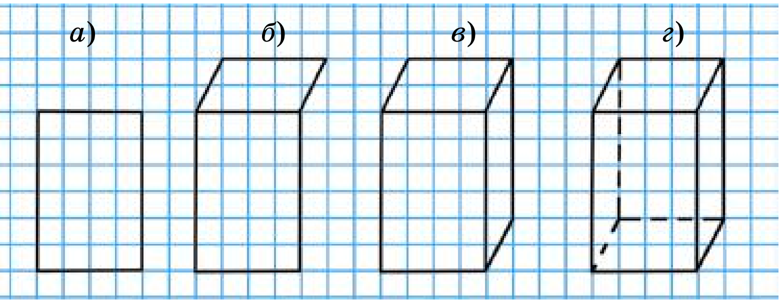


Рис. 7.3

2. Изображение цилиндра.

Цилиндр можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг одной из его сторон (рис. 7.4). Он состоит из двух кругов, равных между собой, и боковой поверхности.

На рисунках 7.5, *а*, *б*, *в* изображено построение цилиндра.

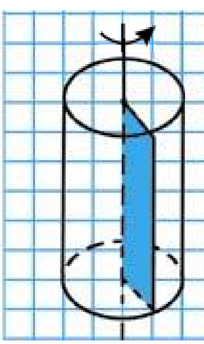


Рис. 7.4

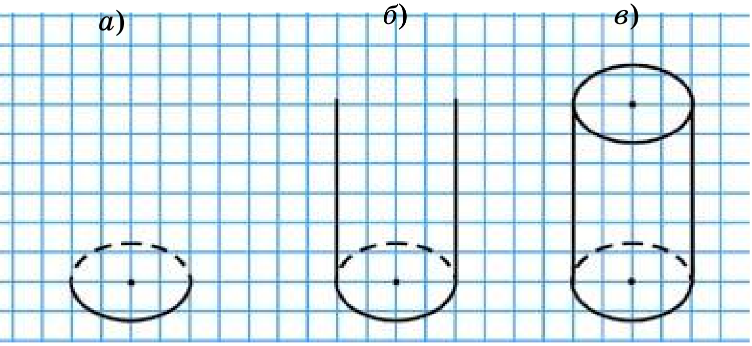


Рис. 7.5

3. Изображение конуса.

Конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника ABC вокруг стороны AC (катета) (рис. 7.6).

На рисунке 7.7, *а*, *б* изображено построение конуса.

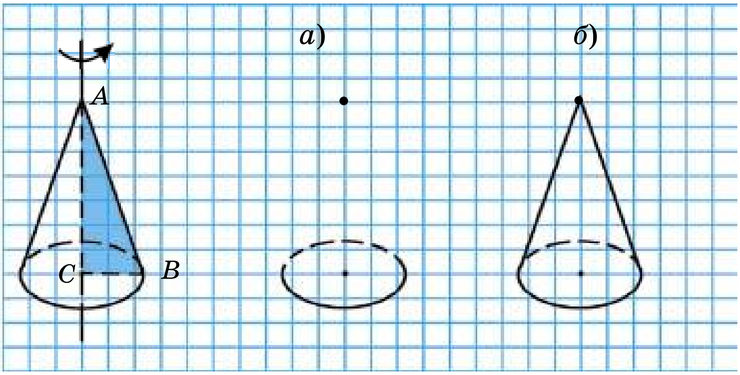


Рис. 7.6 *Рис. 7.7*

4. Изображение шара.

Шар можно рассматривать как тело, которое получается при вращении полукруга вокруг его диаметра (рис. 7.8, *а*).

На рисунке 7.8, *б* показано изображение шара.

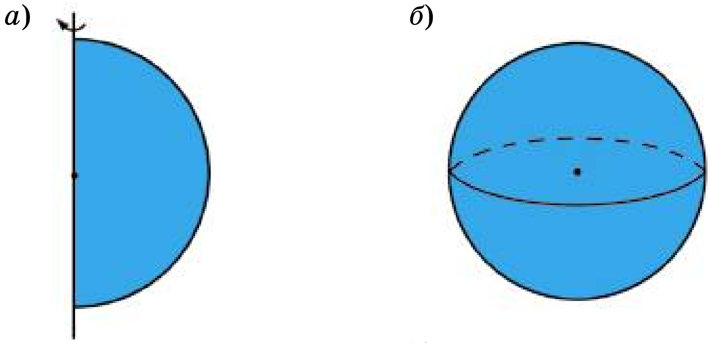


Рис. 7.8

5. Изображение пирамиды.

Фигура, составленная из многоугольника, являющегося основанием, и треугольников с общей вершиной, не лежащей на основании, называется *пирамидой*. Боковые грани пирамиды – треугольники.

В зависимости от вида многоугольника, являющегося основанием пирамиды, пирамида может быть треугольной, четырехугольной, пятиугольной и т.д.

Рассмотрим изображение треугольной пирамиды (рис. 7.9, *а*).

На рисунках 7.9, *б*, *в* изображено построение треугольной пирамиды $SABC$.

Треугольник ABC называется основанием пирамиды, а треугольники: SAB, SBE, SAC – боковыми гранями пирамиды. Точка S называется вершиной пирамиды, а отрезки SA, SB, SC – ее боковыми ребрами, отрезки AB, BC, AC – ребрами основания.

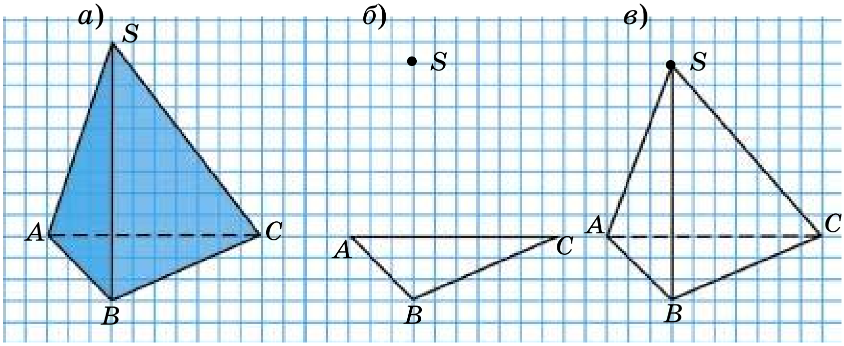


Рис. 7.9

1. Какие геометрические тела вы знаете? Назовите их.
2. В каком случае используются штриховые линии при изображении геометрических тел?
3. Опишите построение изображения треугольной пирамиды

1152. Найдите неизвестный член пропорции (устно):

1) $\frac{2}{3} = \frac{x}{6}$; 2) $\frac{4}{5} = \frac{12}{x}$; 3) $\frac{x}{4} = \frac{7}{8}$; 4) $\frac{9}{x} = \frac{3}{5}$.

А

1153. Перечертите в тетрадь фигуры, изображенные на рисунке 7.10.
1. Какие геометрические тела изображены на рисунке?
2. Запишите невидимые ребра.
3. Запишите видимые грани.

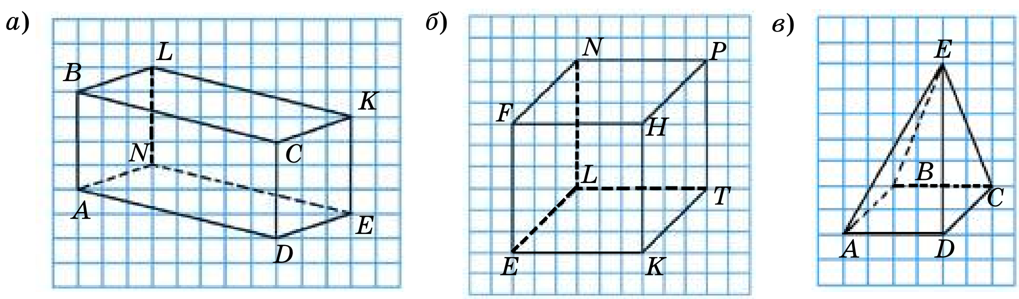


Рис. 7.10

1154. Скопируйте рисунок 7.11 в тетрадь и дорисуйте его:
1) до треугольной пирамиды;
2) до четырехугольной пирамиды.

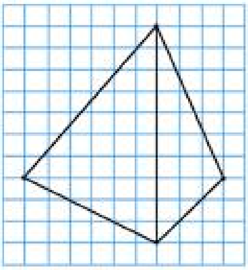


Рис. 7.11

1155. В сосуд цилиндрической формы с радиусом основания 7 см и высотой 56 см помещен шар, касающийся его внутренней поверхности. Каким должен быть диаметр шара? Сколько таких шаров можно поместить в этот сосуд?

1156. На сфере проведены две окружности (рис. 7.12).
1. На сколько частей разделена сфера данными окружностями?
2. Сколько точек пересечения у этих окружностей?

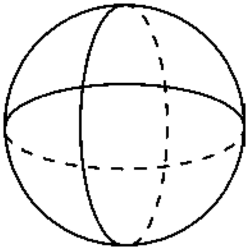


Рис. 7.12

1157. Решите задачу, составив уравнение.
Яблоки из 5 корзин можно разложить в 3 ящика. Масса яблок в каждой корзине на 4 кг меньше, чем масса яблок в каждом ящике. Найдите массу яблок в одной корзине.

A. 7 кг; **B.** 8 кг; **C.** 6 кг; **D.** 10 кг.

1158. Решите уравнения:

1) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{1}{6}$; 2) $\frac{x}{4} = \frac{x-1}{6}$; 3) $\frac{x+6}{2} = \frac{4+x}{3}$;

4) $\frac{3+x}{8} = \frac{x}{5}$; 5) $\frac{x+2}{6} = \frac{1+x}{8}$; 6) $\frac{2x-3}{5} = \frac{x-2}{3}$.

B

1159. На рисунке 7.13 изображена пятиугольная пирамида. Какие ребра и грани являются невидимыми? Запишите их.

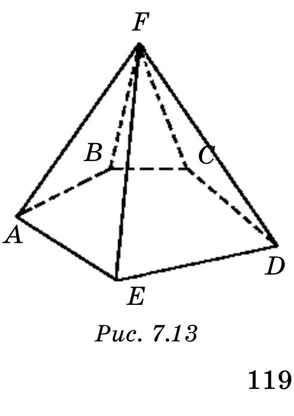


Рис. 7.13

1160. На рисунке 7.14 изображена треугольная пирамида.
1) Перенесите рисунок в тетрадь.
2) Соедините точки D, F и N. Закрасьте полученную фигуру и определите ее вид.

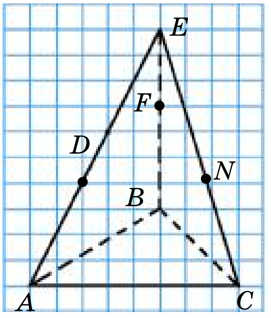


Рис. 7.14

1161. Перерисуйте конус (рис. 7.15) в тетрадь.
1) Через точки A, B и C мысленно проведите плоскость.
2) Какая фигура получается в результате пересечения конуса с этой плоскостью?
3) Закрасьте полученную фигуру.

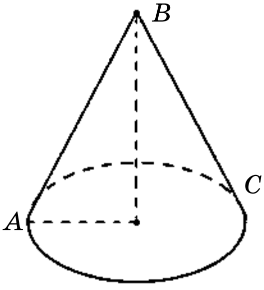


Рис. 7.15

1162. Нужно изготовить каркас четырехугольной пирамиды (рис. 7.16), все ребра которой имеют одинаковую длину. Сколько сантиметров проволоки потребуется, если длина ребра равна 14 см?

1163. В 4 коробках имеются одинаковые по виду кольца. Из них в одной коробке – кольца массой 36 г каждое, а в остальных – по 30 г каждое. Как отпределить одним взвешиванием на весах со стрелкой, в какой коробке кольца массой 36 г каждое?

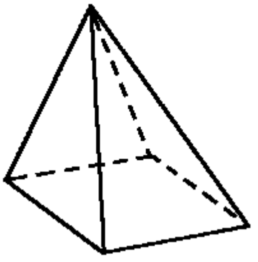


Рис. 7.16

1164. Выполните деление:

1) $\dfrac{5x-3}{2}:\dfrac{3-5x}{7}$;

2) $\dfrac{9y-2}{5}:\dfrac{2-9y}{3}$;

3) $\dfrac{7-x}{6}:\dfrac{x-7}{9}$;

4) $\dfrac{12-ab}{5}:\dfrac{ab-12}{6}$.

C

1165. На рисунке 7.17 изображен цилиндр высотой 10 см, с площадью основания, равной 28,26 см^2. Цилиндр пересекается плоскостью, содержащей ось вращения OO_1. В сечении получается прямоугольник. Вычислите площадь сечения.

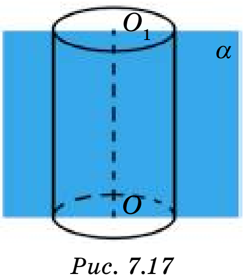


Рис. 7.17

1166. Круг радиусом 15 см разделен на три равных сектора. Один из этих секторов (рис. 7.18, *а*) был свернут в конус (рис. 7.18, *б*). Вычислите длину окружности основания этого конуса.

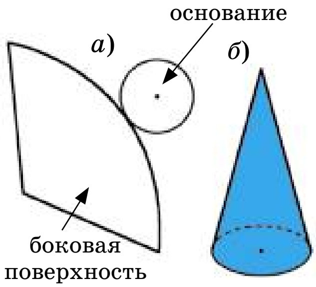


Рис. 7.18

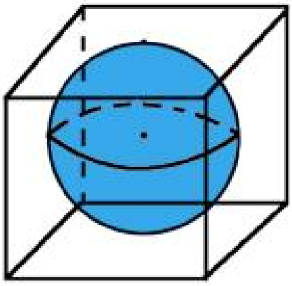


Рис. 7.19

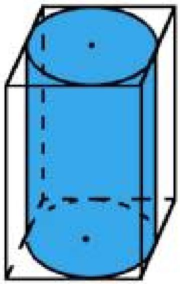


Рис. 7.20

1167. Шар радиусом 4 см помещен в стеклянный куб так, что он касается всех его граней (рис. 7.19). Вычислите объем куба.

1168. Цилиндр помещен в прямоугольный параллелепипед высотой 25 см так, что он касается всех его граней (рис. 7.20). Длина окружности основания цилиндра равна 37,68 см.
Вычислите объем прямоугольного параллелепипеда.

1169. Заказ на изготовление деталей распределили между тремя токарями. Первый токарь взял 0,48 всех деталей, второй – $\frac{5}{6}$ деталей, которые взял первый, а третий – оставшиеся 180 деталей. Сколько всего деталей было заказано?

1170. Выполните действия:

$$\frac{\left(12\frac{1}{8}-5\frac{5}{16}+3\frac{1}{4}\right):\left(-13\frac{5}{12}\right)+6,35}{\left(2\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-2\frac{1}{7}\right)}.$$

1155. 4 шара. **1158.** 1) 2; 2) –2; 3) –10; 4) 5; 5) –5; 6) –1. **1164.** 1) –3,5; 2) –0,6; 3) –1,5; 4) –1,2. **1165.** 60 см^2. **1166.** 31,4 см. **1167.** 512 см^3. **1168.** 3600 см^3. **1169.** 1500 деталей. **1170.** –0,8.

7.2. Понятие вектора

I. **Понятие вектора.**

Величины, которые характеризуются только числовыми значениями, называются *скалярными величинами*. Масса, время, площадь, объем и т.д. – скалярные величины.

Например, площадь участка 6 м^2, где число 6 – числовое значение площади (в квадратных метрах). Площадь – скалярная величина.

Существуют величины, которые характеризуются не только числовым значением и направлением. Например, самолет летит в северо-восточном направлении со скоростью 700 км/ч (рис. 7.21).

Рис. 7.21

В данном случае скорость как величина характеризуется и числовым значением, равным 700 км/ч, и направлением с севера на восток.

Такую величину, как скорость, называют векторной величиной.

Величины, которые характеризуются и числовым значением, и направлением, называются *векторными величинами*.

Вектором AB называется направленный отрезок, началом которого является точка A, а концом – точка B.

Направление вектора указывают стрелкой.

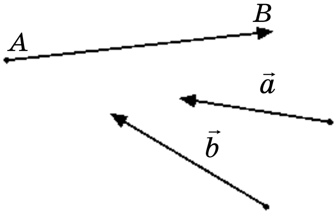


Рис. 7.22

На рисунках вектор изображается направленным отрезком (отрезком со стрелкой).

Векторы обозначают двумя заглавными латинскими буквами со стрелкой над ними или одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней.

Векторы, изображенные на рисунке 7.22, обозначают так: $\overrightarrow{AB}$ (где точка A – начало вектора, а точка B – конец вектора), $\vec{a}$; $\vec{b}$.

Читают: «вектор $\overrightarrow{AB}$», «вектор $\vec{a}$», «вектор $\vec{b}$». Направление, определяемое лучом AB, является направлением вектора $\overrightarrow{AB}$.

1. Какие величины называются скалярными? Приведите примеры.
2. Какие величины называются векторными? Приведите примеры.
3. Что нужно знать, чтобы построить вектор на координатной плоскости?

1171. Найдите число, если:
1) 10% его равно: 3; 5,4; 0,7; 8,25;
2) 25% его равно: 15; 9,1; 0,4; 100;
3) 150% его равно 300; 450; 600; 750.

А

1172. Какие из следующих величин являются векторными: температура, время, объем, скорость, масса (рис. 7.23)?

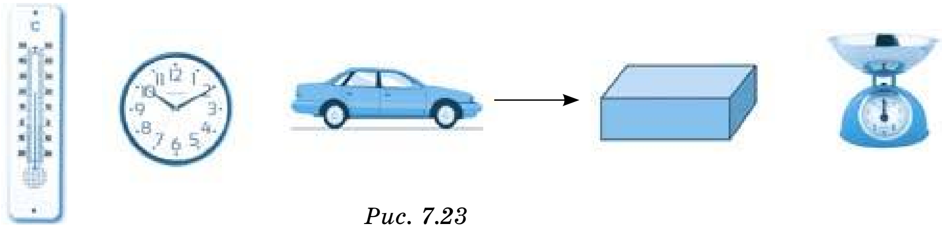


Рис. 7.23

1173. По рисунку 7.24 укажите направление вектора скорости движения каждого из объектов в отдельности.

Рис. 7.24

1174. Используя рисунок 7.25, ответьте на вопросы:
1) От какой точки началось движение?
2) В каком направлении происходит движение?
3) Запишите, с какой скоростью движется велосипедист, если единичный отрезок равен 3 км/ч?

Рис. 7.25

1175. На координатной плоскости изобразите векторы $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{KL}$, если известны координаты точек: $E(1;\ 1)$, $F(5;\ 5)$, $K(-4;\ 1)$, $L(-2;\ 6)$.

1176. Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли два туриста. Один из них идет со скоростью 4 км/ч, а другой – 5 км/ч.
Начертите в тетради прямую. Изобразите точками местоположение пунктов A и B.
Изобразите скорость первого туриста и скорость второго в виде векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. За единичный отрезок (1 км/ч) примите длину одной клетки тетради.

C

1177. На рисунке 7.26 изображена роза ветров в городе A за июнь месяц.
1) Расшифруйте розу ветров.
2) Запишите скорость ветра в указанных направлениях, приняв единичный отрезок за 1 м/с.

С – север; СВ – северо-восток;
Ю – юг; СЗ – северо-запад;
В – восток; ЮВ – юго-восток;
З – запад; ЮЗ – юго-запад.

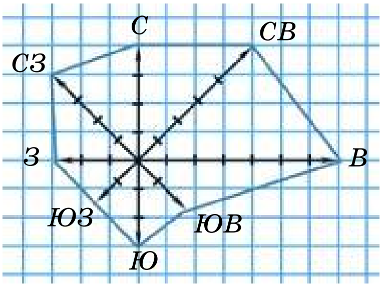


Рис. 7.26

1178. 1) Исходя из значения скоростей, определите возможные или предполагаемые объекты движения (рис. 7.27).
2) Используя рисунок, запишите для каждого случая соответственно значения скорости сближения или скорости удаления.

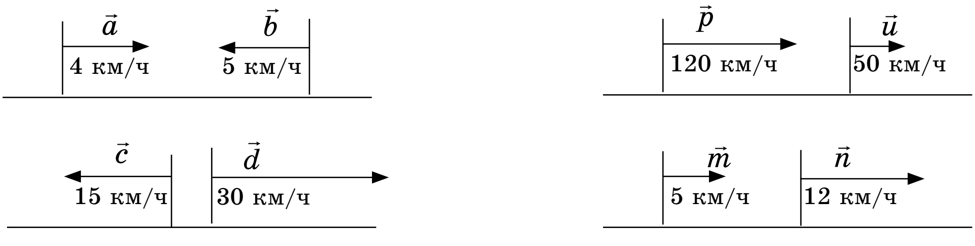


Рис. 7.27

1179. На координатной плоскости изобразите вектор $\overrightarrow{AB}$, если известны координаты точки: $A(6;\ 2)$, $B(1;\ 5)$. Постройте вектор $\overrightarrow{EF}$, симметричный вектору $\overrightarrow{AB}$ относительно оси абсцисс Ox. Запишите координаты точки E и F.

1180°. Вдоль маршрута автобуса расположено 28 остановок, Если расстояние между остановками уменьшить на 25%, то сколько остановок надо будет добавить?

1181. Решите уравнения:

1) $5|x-2|-6=4+3|x-2|$;
3) $7+4|x-1|=9|x-1|-8$;
2) $3|x+1|+4=5|x+1|-6$;
4) $5|x+4|-6=3|x+4|+8$.

▲ **1180.** 9 остановок. **1181.** 1) −3; 7; 2) −6; 4; 3) −2; 4, 4) −11; 3.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

A

1182. Приведите примеры объектов из окружающей среды – тел, имеющих форму цилиндра, прямоугольного параллелепипеда, конуса и шара.

1183. Велосипедист движется при встречном ветре с востока на запад. Его скорость 7 м/с, а скорость ветра 4 м/с. Изобразите графически вектор скорости велосипедиста и вектор скорости ветра (1 см = 1 м/с).

1184. Какие геометрические тела изображены на рисунке 7.28? Рисунок перечертите в тетрадь. Начертите невидимые линии.

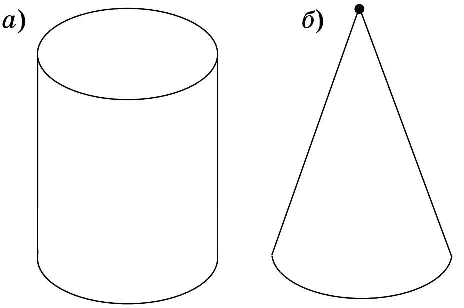


Рис. 7.28

B

1185. Лодка плывет по течению реки в направлении с запада на восток. Собственная скорость лодки 5 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч. Изобразите графически эти скорости (масштаб 1 см = 1 км/ч).

1186. Нарисуйте треугольник ABC. Изобразите векторы AB, AC и BC. Какие из них имеют общее начало?

C

1187. Улитка из точки $A(-2; 2)$ перемещается на север на 3 дм, затем на восток на 4 дм. После этого она проползла на юг на 7 дм.

1) Начертите координатную плоскость и изобразите на ней путь, проделанный улиткой (единичный отрезок – 1 клетку листа тетради принять за 1 дм).
2) Укажите вектор перемещения улитки из начальной точки в конечную.
3) Запишите координаты начальной точки и конечной точки вектора перемещения улитки.

1188. На координатной плоскости изобразите вектор $\overrightarrow{MN}$, если известны координаты точки: $M(-5;\ 1)$, $N(-2;\ 6)$. Постройте вектор $\overrightarrow{M_1N_1}$, симметричный вектору $\overrightarrow{MN}$ относительно начала координат – точки O.

1189. На рисунке 7.29 изображена развертка цилиндра. Длина окружности основания цилиндра равна 62,8 см, а его высота составляет 30 см. Вычислите площадь развертки цилиндра.

A. 2480 см^2 **B.** 2512 см^2 **C.** 2570 см^2 **D.** 2565 см^2.

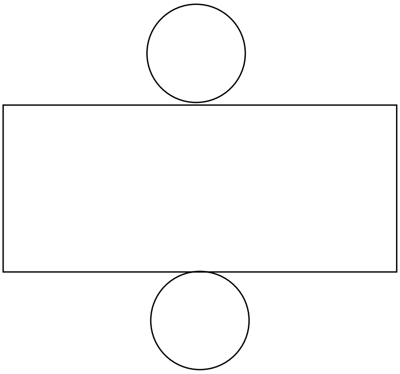


Рис. 7.29

Глава VIII. СТАТИСТИКА. КОМБИНАТОРИКА

Некоторые величины в народном хозяйстве – урожайность, цена товара, скорость движения и т.д. – имеют разные значения. Их подсчет ведется в статистике. «Статистика» от латинского слова «Status» в переводе означает «состояние».

Статистика – наука, занимающаяся сбором, измерением, обработкой и анализом разнообразных количественных и качественных данных и сведений.

В статистике используются статистические характеристики. Часто используемые статистические характеристики – это среднее арифметическое, мода, медиана, размах.

Комбинаторика – раздел математики, который занят поисками ответов на вопросы: сколько всего есть комбинаций в том или ином случае, как из этих комбинаций выбрать наилучшую и т.д.

Слово «комбинаторика» происходит от латинского *combinare*, что означает «сочетать», «соединять». Термин «комбинаторика» был введен знаменитым Готфридом Вильгельмом Лейбницем – всемирно известным немецким ученым.

8.1. Среднее арифметическое нескольких чисел

Со средним арифметическим нескольких чисел приходится встречаться во многих случаях.

Например, среднее арифметическое нескольких чисел находят при определении средней температуры, среднего урожая, средней производительности и т.д.

Средним арифметическим нескольких чисел называют значение частного от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Задача 1. В шахматном турнире ученики 6 класса, проведя 8 партий, получили 13, 13, 12, 13, 10, 13, 12, 10 очков. Найдем среднее арифметическое полученных очков.

Решение: Нужно найти сумму всех полученных очков учениками, затем разделить ее на число слагаемых.

$$\frac{13+13+12+13+10+13+12+10}{8}=12,$$

где число 8 – количество сыгранных партий.

Ответ: Среднее арифметическое очков, полученных учениками, равно 12 очкам.

Полученное в результате вычисления значение частного 12 является средним арифметическим данных чисел 13, 13, 12, 13, 10, 13, 12, 10.

$$\text{Среднее арифметическое чисел} = \frac{\text{сумма чисел}}{\text{число слагаемых}}.$$

Нахождение средней скорости движения.

Задача 2. Автомобиль ехал 2 часа со скоростью 61,3 км/ч, следующие 3 часа – со скоростью 73,4 км/ч, еще 1 час – со скоростью 65,8 км/ч. Какова средняя скорость автомобиля?

Подсказка.

1. Вычислите все расстояние, которое проехал автомобиль.
2. Вычислите время, затраченное на этот путь.
3. Вычислите среднюю скорость движения автомобиля. (Чтобы найти среднюю скорость, надо разделить все расстояние, которое проехал автомобиль, на время, затраченное на этот путь.)
4. Сформулируйте правило нахождения средней скорости движения.

Проверьте себя.

1. $2 \cdot 61{,}3 + 3 \cdot 73{,}4 + 65{,}8 = 122{,}6 + 220{,}2 + 65{,}8 = 408{,}6$ (км) – все расстояние, пройденное автомобилем;
2. $2 + 3 + 1 = 6$ (ч) – время, за которое автомобиль проехал данное расстояние;
3. $\dfrac{61{,}3 \cdot 2 + 73{,}4 \cdot 3 + 65{,}8}{2+3+1} = \dfrac{408{,}6}{6} = 68{,}1$ (км/ч) – средняя скорость движения.

Ответ: 68,1 км/ч.

4. Средняя скорость движения равна отношению всего пройденного пути ко всему времени, затраченному на этот путь.

$$\text{Средняя скорость движения} = \frac{\text{весь пройденный путь}}{\text{все время движения}}.$$

1. Какое число называют средним арифметическим нескольких чисел?
2. Как найти среднюю скорость движения?
3. В каких случаях используют среднее арифметическое значений величин?

1190. Найдите среднее арифметическое чисел (устно):

1) 5 и 3;	4) 0,6 и 0,4;	7) 1,16 и 1,84;
2) 15 и 17;	5) 1,2 и 1,8;	8) 2,63 и 2,37;
3) 30 и 50;	6) 3,6 и 3,4;	9) 4,71 и 4,25.

A

1191. Найдите среднее арифметическое чисел:

1) 5, 7, 10, 18; 4) 3, 6, 12, 10, 9;

2) 14, 18, 17, 23; 5) 20, 32, 43, 49;
3) 45, 58, 76, 81; 6) 100, 150, 180, 170.

1192. В течение первой недели августа среднесуточная температура воздуха была: 24°C, 27°C, 22°C, 25°C, 30°C, 29°C, 32°C. Какова средняя температура воздуха этой недели?

1193. Самолет летел 1,5 часа со скоростью 480 км/ч, 0,3 часа – со скоростью 600 км/ч. Какова его средняя скорость?

1194. Чтобы узнать массу одной капли воды, сначала взвесили пустой стакан. Масса его была равна 45 г. Затем, добавив в стакан 50 капель воды, снова его взвесили. Масса стакана с водой стала равна 48,5 г. Какова средняя масса одной капли?

1195. Заполните пустые клетки таблицы:

Первое число	Второе число	Третье число	Среднее арифметическое
86		90	80
58,2	49,4		54,3
$2\frac{2}{3}$	$1\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{12}$	

1196. **Решите задачу, составив уравнение.** Среднее арфметическое двух чисел 27,49. Первое число меньше второго на 3,48. Найдите эти числа.

1197. **Практическая работа.**
1) Измерьте длину 4 своих пядей. Найдите среднюю длину одной пяди.
2) Измерьте длину 20 своих шагов и найдите среднюю длину одного шага.

1198. Решите уравнения:

1) $3\frac{1}{5}x + 2,9x = 36,6$;
2) $5,6x - 2,4x = 4,8$;
3) $9x - 7\frac{9}{20}x = 4,03$;
4) $(x + 2,6) : 0,8 = 7,45$;
5) $(7,8 - y) : 6,1 = 0,2$;
6) $16,5 : (7,6 - y) = 5$.

B

1199. Найдите среднее арифметическое чисел:

1) 10,1; 9,4 и 9,9;
2) $11\frac{1}{2}$; 9,7; $9\frac{4}{5}$ и 10,2;
3) $\frac{9}{20}$; 0,65 и $\frac{2}{5}$;
4) 5,9; 6,1; 6 и 4,8;
5) 3,6; $3\frac{3}{4}$ и 3,66;
6) 5,21; 4,98; 5,14 и 8,67.

1200. Крестьянское хозяйство, засеяв 3 участка пшеницей, собрало 280 ц урожая с 16 га земли; 225 ц урожая с 12,5 га; 197,8 ц урожая – с 11,5 га. Сколько центнеров пшеницы в среднем собрало крестьянское хозяйство с 1 га?

A. 17,4 ц; B. 16,8 ц; C 17.57 ц; D. 18 ц.

$$\text{Урожайность} = \frac{\text{масса всего урожая}}{\text{площадь засеянного участка}}.$$

1201. Площадь каждого из трех садовых участков равна 12 га. С первого участка собрали 1029,6 ц яблок, со второго – 918 ц, а с третьего – 1166,4 ц. Найдите среднюю урожайность участка.

1202. Велосипедист ехал 1,5 ч со скоростью 13,6 км/ч по асфальтированной дороге, после отдыха в течение 0,2 ч он ехал еще 0,5 ч со скоростью 9,8 км/ч по грунтовой дороге. Найдите среднюю скорость велосипедиста.

1203. Три года тому назад брату и сестре было вместе 15 лет. Чему будет равна сумма их возрастов через 3 года?

1204. На координатной прямой даны точки $Q(4{,}3)$ и $P(6{,}9)$ (рис. 8.1). Чему равно среднее арифметическое координат точек Q и P? Найдите на координатной прямой точку, соответствующую этому числу. Обозначьте ее буквой A. Запишите точку A с координатой.

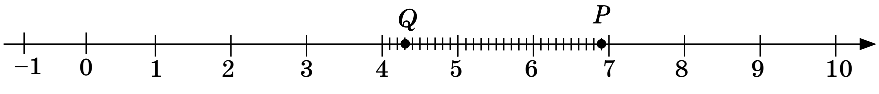


Рис. 8.1

1205. Из одного города в другой выехал поезд. Первую половину расстояния он проехал за 2,4 ч со скоростью 72,75 км/ч, а вторую половину – за 3,6 ч. Найдите среднюю скорость поезда.

1206. Скорость моторной лодки по течению реки 30 км/ч, а против течения – 25,2 км/ч.
1) Найдите среднюю скорость моторной лодки.
2) Чем является среднее арифметическое скоростей моторной лодки по течению реки и против течения?

1207. Сократите дробь:

1) $\frac{3a-15}{3}$; 3) $\frac{10-6a}{3a-5}$; 5) $\frac{c-5}{4c-20}$;

2) $\frac{16a-2b}{8a-b}$; 4) $\frac{12a-4}{1-3a}$; 6) $\frac{4a-b}{2b-8a}$.

C

1208. На координатной прямой отложены отрезки AC и CB. Координата точки $C(6{,}1)$ является средним арифметическим координат точек $A(2{,}4)$ и B. Найдите координату точки B (рис. 8.2).

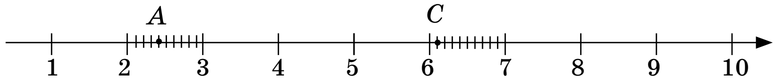


Рис. 8.2

1209. Решите задачу, составив уравнение.
Среднее арифметическое трех чисел равно 4,7. Второе число на 0,3 меньше первого, а третье число в 1,2 раза больше первого. Чему равно первое число?

1210. В читальном зале библиотеки 24 человека, средний возраст которых равен 21 году. Когда из зала вышел один человек, средний возраст оставшихся стал равен 20 годам. Сколько лет человеку, вышедшему из зала?

1211. Автомобиль находился в пути 3 ч. В первый час он проехал 54 км, во второй – в 1,5 раза больше, чем в первый. Путь, пройденный в третий час, составляет 0,8 пути, пройденного во второй час. Найдите среднюю скорость автомобиля.

1212. В трех коробках находятся кольца разной массы. В одной коробке каждое кольцо весит 10 г, в другой – 13 г, в третьей – 20 г. По внешнему виду все кольца одинаковые. Неизвестно, какой массы кольца находятся в каждой коробке. Пользуясь весами со стрелкой и взвесив только один раз, как определить, в какой коробке находятся кольца массой 13 г?

1213*. Купили 3 кг чая по цене 750 тг и 2 кг чая по цене 980 тг и смешали. Какова цена 1 кг смеси полученного чая?
A. 850 тг; B. 842 тг; C. 860 тг; D. 900 тг.

1214°. Среднее арифметическое скоростей лодки по течению и против течения равно 8,5 км/ч. Скорость лодки по течению реки 10,9 км/ч.
- Какова скорость течения реки?
- Какова скорость лодки против течения реки?

1215. Решите задачу, составив уравнение.
В автобусе было несколько пассажиров, средний возраст которых был равен 24 годам. Когда в автобус зашли 2 человека, сумма возрастов которых равна 69 годам, то средний возраст пассажиров стал равен 25 годам. Сколько пассажиров было в автобусе первоначально?

1216. Для детского сада купили 4 кг конфет двух сортов. Их смешали. Цена смеси была больше 292 тенге, но меньше 307 тенге. Конфет одного сорта купили 3 кг по 320 тенге. Оцените стоимость конфет другого сорта.

1217. Вычислите:

1) $4-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2}}}$; 3) $6-\cfrac{2}{5-\cfrac{2}{4-\cfrac{2}{3}}}$;

2) $7-\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}}$; 4) $\cfrac{3}{4}+\cfrac{7}{6-\cfrac{3}{5+\cfrac{8}{4-\cfrac{4}{5}}}}$.

1218. Космический корабль преодолел первую половину расстояния от Земли до Луны за 25 ч, а вторую – за 50 ч. Используя информационно-коммуникационные технологии (ИКТ), запишите это расстояние. Вычислите среднюю скорость движения корабля, считая движение прямолинейным. Ответ округлите до сотен.

Ключевые факты.

Среднее арифметическое нескольких чисел.

Число, полученное при делении суммы чисел на число слагаемых, называется *средним арифметическим* нескольких чисел.

Задача.

Участница соревнований по фигурному катанию на коньках получила оценки: 4,9; 5,2; 5,4; 5,3; 5; 5,4.

Какова средняя оценка этой участницы?

$\dfrac{4,9+5,2+5,4+5,3+5+5,4}{6}=\dfrac{31,2}{6}=5,2$, где знаменатель 6 – число оценок.

Ответ: Средняя оценка участницы 5,2.

1198. 1) 6; 3) 2,6; 5) 6,58. **1201.** 86,5 ц. **1202.** 11,5 км/ч. **1205.** 58,2 км/ч. **1206.** 27,6 км/ч. **1207.** 3) –2; 4) –4; 5) 0,25. **1209.** 4,5. **1210.** 44 года. **1211.** 66,6 км/ч. **1214.** • Скорость течения реки 2,4 км/ч. • Скорость лодки против течения 6,1 км/ч. **1215.** 19 пассажиров. **1216.** 208 тг $< x$ тг $<$ 268 тг. **1217.** 1) $3\dfrac{4}{7}$; 2) $6\dfrac{2}{3}$; 3) $5\dfrac{6}{11}$; 4) 2. **1218.** $\approx$ 5100 км/ч.

8.2. Размах, медиана, мода ряда данных чисел

I. Размах ряда данных чисел.

Размахом ряда данных чисел **называется разность между наибольшим и наименьшим числами этого ряда.**

Задача 1. Среднесуточная температура воздуха в первую неделю марта была: 3°С, 4°С, 5°С, 8°С, 6°С, 4°С, 7°С. Найдите размах среднесуточной температуры воздуха на этой неделе.

Значения температуры: 3°, 4°, 5°, 8°, 6°, 4°, 7°С составляют ряд данных.

***Решение** (образец).*

1) 8°С – наибольшее значение среднесуточной температуры воздуха за неделю;

2) 3°С – наименьшее значение среднесуточной температуры воздуха за неделю.

$8^{\circ} - 3^{\circ} = 5^{\circ}C$ – размах среднесуточной температуры воздуха за неделю.
Ответ: $5^{\circ}C$.

II. Медиана ряда данных чисел.

Медиана – это статистическая характеристика средних значений величин.

Медиана ряда показывает, какой товар имеет среднюю цену, какая компания получила среднюю прибыль, кто из спортсменов показал средний результат и т.д.

Для нахождения медианы ряда данных надо:

1) заданные числа расположить в порядке возрастания;

2) пронумеровать подряд все числа упорядоченного ряда данных, обозначив номером 1 меньшее число. Полученные номера – это места чисел в ряду.

а) **Если количество чисел в ряду данных нечетное, то медианой ряда данных является число, расположенное посередине.**

б) **Если количество чисел в ряду данных четное, то медиана ряда данных равна среднему арифметическому двух чисел, стоящих посередине.**

Задача 2.

Сегодня учитель проверял скорость чтения нескольких учеников. Сауле прочитала 95 слов, Андрей – 70 слов, Дархан – 80, Саша – 70, Боря – 100, Динара – 60 слов, Дима – 90 слов в минуту.

Кто из учеников прочитал такое количество слов, которое можно принять за медиану ряда данных чисел?

Решение.

Числа: 95, 70, 80, 70, 100, 60, 90 составляют ряд данных.

Заполним таблицу, расположив числа в порядке возрастания.

Порядковый номер	1	2	3	4	5	6	7
Имя учащегося	Динара	Андрей	Саша	Дархан	Дима	Сауле	Боря
Количество прочитанных слов в минуту	60	70	70	80	90	95	100

В данном ряду 7 чисел. Число 7 – нечетное. В этом случае одно число стоит посередине ряда. Таким числом является число 80. Значит, медианой данного ряда является число 80. Это количество слов, прочитанных Дарханом в минуту.

Ответ: Дархан прочитал 80 слов в минуту – это и есть медиана ряда данных.

Задача 3. Фигурист после исполнения программы получил баллы: 5,4; 5,2; 5,7; 5,3; 5,5; 5,6; 5,2; 5,6. Найдите медиану полученных баллов фигуриста.

Решение.

Числа 5,4; 5,2; 5,7; 5,3; 5,5; 5,6; 5,2; 5,6 составляют ряд данных.

Заполним таблицу, расположив числа в порядке возрастания.

Порядковый номер	1	2	3	4	5	6	7	8
Балл	5,2	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,6	5,7

В этом случае ряд данных состоит из 8 чисел, посередине которого стоят два числа: 5,4 и 5,5.

Медианой данного ряда чисел будет среднее арифметическое чисел, расположенных посередине ряда:

$$\frac{5,4+5,5}{2}=5,45.$$

Медиана данного ряда чисел – число 5,45. Значит, 5,45 – медиана баллов фигуриста.

Ответ: 5,45.

III. Мода ряда данных чисел.

Число, встречающееся с наибольшей частотой среди данных чисел, является *модой* этих *чисел*.

Задача 4.

Найдите моду ряда чисел:

3,5; 4; 2,6; 3,5; 2,8; 3,5; 2,9.

Решение:

Частота числа 3,5 равна 3, а все остальные числа встречаются в нем по одному разу.

Значит, число 3,5 является модой данного ряда чисел.

Ответ: число 3,5 – мода данного ряда чисел.

Задача 5.

Когда Данияр взвесил каждую пойманную им рыбу в отдельности, то их массы были:

1,2 кг; 3,24 кг; 1,9 кг; 2,16 кг; 2 кг.

По условию задачи составим числовой ряд:

1,2; 3,24; 1,9; 2,16; 2.

В данном ряду чисел моды нет, так как все числа встречаются в нем по одному разу.

Ответ: Нет моды данного ряда чисел.

Например, у людей, идущих по улице, чаще всего встречается один определенный вид одежды. Этот вид одежды в этот период времени является модой одежды (модной одеждой).

Одной из статических разновидностей моды являются предметы повседневного спроса населения.

1) Что называют размахом ряда данных чисел?
2) Что определяет медиана как статистическая характеристика ряда данных?
3) Как найти моду величин?

1219. Найдите разность чисел (устно):

1) $1-\frac{3}{8}$; 3) $\frac{1}{2}-2\frac{3}{4}$; 5) $\frac{3}{4}-0,75$; 7) $\frac{1}{99}-1$;

2) $\frac{5}{7}-2$; 4) 0,99 – 3; 6) $\frac{4}{5}-1,8$; 8) $7\frac{1}{8}-8$.

1220. Продавец за день продал 37 сборников сказок, 120 учебников, 24 тетради для рисования и 9 географических атласов. Какой товар является модой для покупателей?

A

1221. Найдите размах ряда чисел:

1) 1; 2; 5; 7; 3) 6,3; 0,6; 7; 15,9;

2) $3\frac{1}{5}$; $2\frac{1}{8}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{5}$; 4) 0,4; 2,5; 9; 20.

1222. Найдите моду ряда чисел:

1) 2,1; 3,5; 4,6; 2,1; 0,3; 4) 6,1; 7,5; 7,5; 5,9; 6,1;

2) $\frac{3}{5}$; $1\frac{1}{7}$; $2\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}$; 1; $\frac{3}{5}$; 5) 0,6; 0,5; 0,3; 0,6; 0,1;

3) 5,1; 7,5; 8,3; 10,2; 20; 6) 7, 9; 10; 8; 6.

1223. Найдите медиану ряда чисел:

1) 9; 4; 5,1; 3,2; 7; 6,2; 8,9;

2) 3,5; 2,6; 3,5; 1,3; 2,6; 3,5;

3) $\frac{7}{11}$; $\frac{9}{11}$; $\frac{2}{11}$; $\frac{4}{11}$; $\frac{7}{11}$; $\frac{5}{11}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{6}{11}$.

1224. На соревнованиях по баскетболу члены команды набрали следующее количество очков: Айдар – 14 очков, Сергей – 16, Юра – 16, Мади – 9, а Асхат не набрал ни одного очка.
1) Есть ли мода ряда данных?
2) Найдите размах изменения количества очков.
3) Чей результат является медианой ряда данных?

1225. Рассмотрите таблицу результатов забега на дистанцию 100 м группы учеников на уроке физкультуры.

Имя ученика	Время бега (в секундах)
Назерке	14,1
Меруерт	18,2
Алихан	15,5
Алишер	16,2
Алибек	22,4
Сакен	16,2

Найдите моду, размах, медиану представленных числовых данных.

1226. В самом нижнем слое атмосферы – тропосфере сосредоточено 0,8 всего воздуха Земли (рис. 8.3). Сколько процентов воздуха земной атмосферы сосредоточено выше слоя тропосферы?

1227. Найдите неизвестный член пропорции:

1) $\frac{x}{48} = \frac{5}{6}$; 3) $\frac{8}{15} = \frac{12}{x}$; 5) $\frac{x}{42} = \frac{7}{12}$;

2) $\frac{28}{x} = \frac{4}{9}$; 4) $\frac{9}{20} = \frac{x}{16}$; 6) $\frac{9}{16} = \frac{x}{24}$.

Рис. 8.3

В

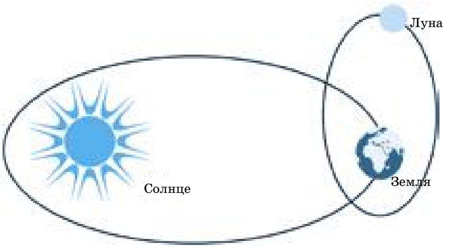
1228. Найдите медиану ряда чисел:

1) $\frac{1}{9}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{5}{18}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{15}$; $\frac{7}{30}$; $\frac{1}{3}$.

1229. Среднесуточная температура воздуха в первую неделю марта была: 14°С, 16°С, 17°С, 14°С, 15°С, 17°С, 20°С.
Найдите:
1) размах изменения температуры;
2) медиану температуры воздуха за неделю;
3) моду ряда данных.

1230. Во время игры веселых и находчивых Юра набрал 7 очков, Антон – 4, Зарина – 8, Сережа – 5, Данияр – 6 очков.
• Сколько очков составляет размах ряда данных?
• Вычислите медиану ряда данных.

1231. На солнечной стороне Луны температура равна 120°С, а на противоположной стороне температура –170°С. Чему равен размах изменения температур на поверхности Луны?



1232. Три виноградника имеют площадь по 3 га каждый. С первого виноградника собрали урожай 18 ц, со второго – 21 ц, с третьего – 15 ц. Найдите размах урожайности винограда с 1 га.

1233. Путешественники ехали на автобусе 4 часа. За первый час они проехали 56 км, за второй час они проехали в 1,2 раза больше, а за третий час в 1,5 раза больше. За четвертый час путешественники проехали $\frac{4}{5}$ пути, пройденного за третий час. Найдите моду ряда изменений скоростей.

1234. Решите неравенства:

1) $10 < 3x + 4 < 19$; 3) $4 < \frac{3+x}{2} < 7$;

2) $-5 < 9 + 2x < 17$; 4) $-3 < \frac{x-8}{4} < 1$.

C

1235. В один из дней марта измерили температуру воздуха утром, в полдень, вечером и ночью. По результатам измерения в этот день среднее арифметическое температуры воздуха за сутки было – 6°С.
По сравнению с температурой воздуха в полдень утром она была на 3°С ниже, вечером на 1°С ниже и ночью на 4°С ниже. Найдите:
1) размах изменения температуры воздуха;
2) медиану изменения температуры воздуха за сутки.

1236. В ноябре в магазин одежды поступили костюмы, пальто, платья и рубашки по 120 штук каждого вида. В первую неделю было продано $\frac{3}{5}$ костюмов, 0,75 пальто, $\frac{1}{2}$ платьев и $\frac{1}{3}$ рубашек. Сколько костюмов, пальто, платьев и рубашек было продано в магазине за первую неделю? Какой товар является самым модным для покупателей?

1237. Выработку за первые четыре часа токарь записывал в виде таблицы:

Время работы	За первый час	За второй час	За третий час	За четвертый час
Количество деталей	120			

Ответьте на вопросы, заполнив таблицу:
1) За второй час токарь изготовил на 10% деталей меньше, чем за первый час. Сколько деталей токарь изготовил за второй час?
2) За третий час токарь изготовил $\frac{8}{9}$ деталей, изготовленных за второй час. Сколько деталей токарь изготовил за третий час?
3) За четвертый час токарь изготовил на 4 детали больше, чем за третий час. Сколько деталей токарь изготовил за четвертый час?
4) Чему равна медиана количества деталей, изготовленных токарем за 4 часа?

1238. С трех участков собрано 1008 ц урожая. Количество урожая, собранного с первого участка, относится к количеству урожая, собранного со второго, как 5 : 9. Количество урожая, собранного с третьего участка, на 40% больше количества урожая, собранного с первого.
1) Сколько центнеров урожая собрано с каждого участка в отдельности?
2) Какова медиана урожая, собранного с трех участков? С какого участка собрано такое количество?

1239. Выполните действия:

$$\left[\frac{3,2+2\frac{2}{7}\cdot 0,7}{0,6-\frac{1}{3}}-\frac{\left(3,8-2\frac{1}{6}\right):1,4}{5\frac{8}{15}-3\frac{1}{5}}\right]:4\frac{3}{8}.$$

Ключевые факты.

Размах, медиана, мода ряда данных чисел.

1. *Разность между наибольшим и наименьшим значениями ряда данных называется* ***размахом.***

2. ***Медиана*** *ряда данных определяет среднее значение ряда данных.*

3. ***Модой*** *ряда данных чисел называется число, наиболее часто встречающееся в ряде данных.*

Задача.

Пятеро девочек – Мадина, Лена, Катя, Таня и Самал собирали марки. Мадина собрала 25 марок, Лена – 26, Катя – 19, Таня – 29 и Самал – 19 марок.

Найдите размах, медиану и моду ряда представленных данных.

Решение.

Числа 25, 26, 19, 29, 19 составляют ряд данных.

1. $29 - 19 = 10$ – размах ряда данных.

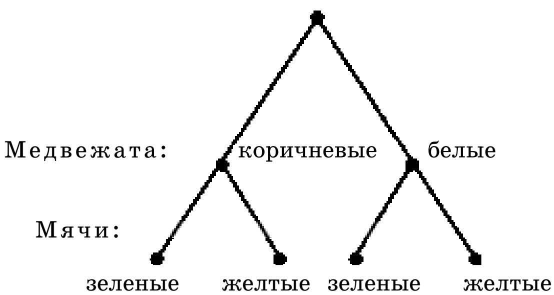
2. Заданные числа расположим в порядке возрастания: 19, 19, 25, 26, 29.

В данном ряду 5 чисел. Число 5 – нечетное. Число 25, стоящее посередине ряда, является медианой ряда данных.

3. Наибольшую частоту имеет число 19. Число 19 является модой данного ряда чисел.

1226. 20%. **1227.** 3) 22,5; 4) 7,2; 6) 13,5. **1228.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{7}{30}$. **1229.** 2) 16°C – медиана среднесуточной температуры. **1230.** «6» – медиана очков. **1233.** 67,2 км. **1234.** 2) $-7 < x < 4$; 3) $5 < x < 11$. **1237.** 4) 104 детали. **1238.** 1) 240 ц; 432 ц; 336 ц. **1239.** 4.

Жанат пришел в магазин, чтобы купить сестренке игрушки. В магазине он увидел коричневых и белых медвежат, зеленые и желтые мячи. Сколько вариантов выбора игрушек у Жаната, если он хочет купить одного медвежонка и один мяч? Каких медвежат и какие мячи выбрали бы вы?



8.3. Решение комбинаторных задач методом перебора

Некоторые процессы, которые встречаются в жизни, можно выполнить в одном или нескольких вариантах. В таком случае определяются все эти варианты, и среди них выбирается тот, который считается оптимальным. Значит, осуществляется *перебор возможных вариантов*.

Задача 1. В классе Антон, Сакен и Юра должны отдежурить три дня, по одному дню каждый. Сколько вариантов дежурства ребят можно составить?

При переборе возможных вариантов величины (объекты) записываются условными знаками.

Например, имена ребят в задаче обозначаются их заглавными буквами. Имя Антона обозначается буквой А, имя Сакена – С, имя Юры – Ю. Иногда элементы варианта обозначаются цифрами.

Схема перебора возможных вариантов изображается как дерево с разветвленными ветками (рис. 8.4). Сколько веток на «дереве», столько вариантов решения задачи. Корень «дерева», обозначенный звездочкой (*), изображает основной объект.

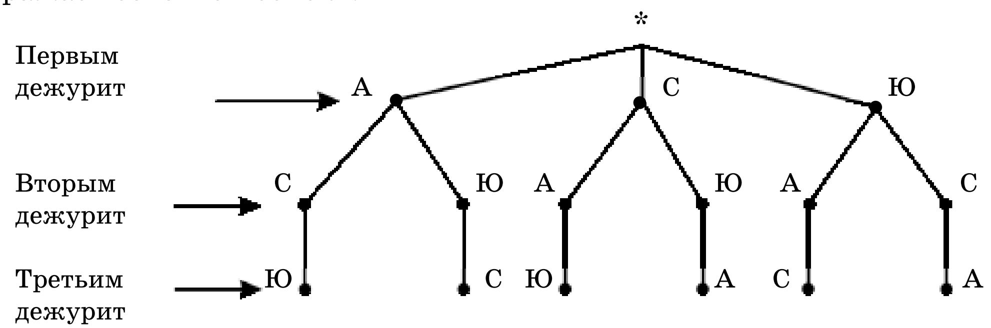


Рис. 8.4

Возможные варианты решения задачи:

АСЮ, АЮС, САЮ, СЮА, ЮАС, ЮСА.

Имеются 6 вариантов дежурства ребят.

Ответ: 6 вариантов дежурства ребят.

Такой способ перебора возможных вариантов называют *«Деревом возможных вариантов»*.

Возможные варианты решения задачи можно записать и в виде таблицы.

Задача 2. На прямой отметьте точки *A, B, C, D* и *E* (рис. 8.5). Сколько всего отрезков получилось?

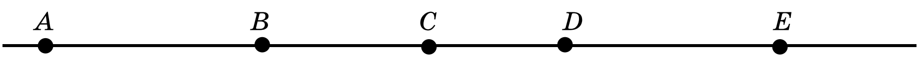


Рис. 8.5

В данном случае надо учесть, что отрезок AB можно записать как отрезок BA. При таком обстоятельстве необходимо принять вариант записи букв в алфавитном порядке. Например, обозначение отрезка AB.

Отрезки: AB, AC, AD, AE
BC, BD, BE
CD, CE
DE

Количество отрезков: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. В данном случае возможные варианты записаны в виде треугольной таблицы.

Ответ: 10 вариантов.

На рисунке 8.6 показано изображение решения задачи способом «Дерево возможных вариантов».

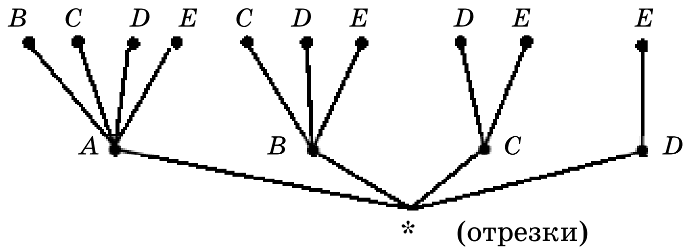


Рис. 8.6

1. Какими способами осуществляется перебор возможных вариантов?
2. Как обозначают объекты и предметы в условии задачи?
3. Как определить количество вариантов в способе «Дерево возможных вариантов»?

1240. Вычислите устно:

1)	2)	3)	4)
$-0{,}9 - 3{,}5$	$0{,}4 - 7$	$5{,}8 - 10$	$0{,}2 - 1$
$: 2$	$: 3$	$\cdot 5$	$\cdot 4$
$- 0{,}8$	$- 2{,}8$	$: 0{,}7$	$+ 7$
$: (-5)$	$: 4$	$+ 14$	$: 2$
$\cdot 3$	$- 0{,}75$	$: (-4)$	$- 3{,}1$
?	?	?	?

А

1241. 1) Запишите число 15 в виде суммы двух целых положительных слагаемых. Сколько вариантов суммы можно записать?
2) Запишите число 60 в виде произведения двух целых положительных множителей. Сколько вариантов произведения можно записать?

1242. Используя цифры 0, 1, 2 и 3, причем каждую только один раз, составьте все возможные двузначные числа. Сколько двузначных чисел получилось? Выпишите в одну строку четные числа, а в другую – нечетные.

1243. 1) Сколько двузначных чисел можно записать, используя цифры 7, 5 и 4?
- Сколько простых чисел получилось?
- Сколько составных чисел получилось?

2) Запишите четырехзначные числа, в которых цифра 9 повторяется 2 раза, а цифра 0 повторяется 2 раза. Сколько чисел получилось?

1244. На прямой обозначьте точки *K*, *L*, *P* и *T*. Сколько всего отрезков получилось? Запишите их.

1245. Сколько различных букетов можно составить из желтых и красных маков, чтобы в каждом букете было 3 цветка?

1246. Из пункта *A* в пункт *B* путник может пройти по 1-й, 2-й или 3-й дороге. Из пункта B в пункт A он может пройти по дороге *a* или *b* (рис. 8.7). Сколькими вариантами путник может пройти из пункта *A* в пункт *B* и обратно? Запишите все варианты с их обозначениями.

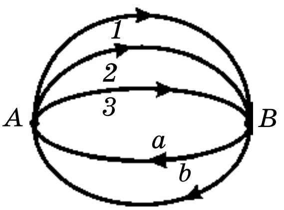


Рис. 8.7

1247. У Нади есть белая и красная кофты, а также черная и синяя юбки. Сколько различных нарядов может составить Надя, предполагая, что они подходят друг к другу?

1248. У Оли имеются 4 кубика: красный, синий, зеленый, желтый. Сколькими способами она может выстроить эти кубики в ряд?

1249. Решите уравнения:

1) $|-x| + |47| = |-56|$;
3) $|-8| + |x| = |-14|$;
2) $|-9| \cdot |x| = |-45|$;
4) $|-x| : |6| = |-5|$.

B

1250. 1) Запишите все трехзначные числа, используя цифры 0, 8 и 9, причем каждую только один раз. Сколько таких чисел получилось? Решите задачу с помощью построения «дерева» возможных вариантов.

2) Сколько трехзначных чисел можно получить из числа 763, кроме самого числа, переставляя местами его цифры?

1251. На районной олимпиаде по математике 5 учеников набрали одинаковое количество баллов и стали победителями. Сколько существует вариантов выбора двух учеников из этих победителей на областную олимпиаду?

1252. 6 мальчиков провели между собой состязания по борьбе. Каждый из них состязался с другим 1 раз. Сколько всего состязаний провели мальчики? Возможные варианты запишите в виде таблицы.

1253. Туристы должны совершить путешествие по таким городам Казахстана, как Туркистан, Алматы и Семей. Сколько существует вариантов такого маршрута? Решите задачу с помощью построения «дерева» возможных вариантов.

1254. В школе есть кружки юных натуралистов, юных математиков, художественной самодеятельности, рукоделия и легкой атлетики. Айжан может посещать только два кружка. Сколько существует вариантов выбора кружка у Айжан?

1255. Паук и муха сидят на противоположных вершинах куба (рис. 8.8). Паук может ползти по ребру куба и по диагонали грани куба. Сколько вариантов движения паука к мухе существует?

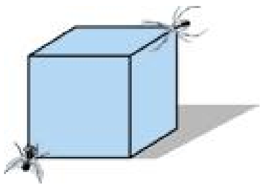


Рис. 8.8

1256. Решите уравнения:

1) $1,1x - 2,5 = 0,6x$; 3) $16 - 9,5y = 3y + 21$; 5) $6y - 2,8 = 2,5y$;

2) $6,75x = 2\frac{1}{4}x - 9$; 4) $1\frac{1}{4}y + 7,5 = 5y$; 6) $0,5x - 7 = -\frac{2}{3}x$.

C

1257. При расставании друзья обменялись визитками. Всего было 12 визиток. Сколько друзей обменялись визитками?

1258. Города Уральск, Костанай, Павлодар, Актау и Тараз имеют друг с другом прямое воздушное сообщение. Сколько вариантов воздушных сообщений между этими городами?

1259. У Даши 4 кофты, 3 юбки и 2 пары туфель разных цветов. Сколько разных нарядов может составить Даша, предполагая, что они подходят друг к другу?

1260. Сколько способов возврата сдачи в 60 тенге монетами достоинством в 5 тенге и в 10 тенге у кассира? В сдаче не должно быть монет только по 5 тенге или только по 10 тенге.

1261. Имеется 4 ключа от 4 комнат с разными замками. Неизвестно, какой ключ открывает какую комнату. Сколько раз в худшем случае нужно подбирать ключ, чтобы открыть эти 4 комнаты?

1262. Между городами A и B имеются 5 дорог, а между городами B и C – 4 дороги. Сколькими способами можно добраться из города A в город C через город B?

1263. Девочка на страницу альбома хочет наклеить рисунки льва, медведя, волка и лисы. Льва она хочет наклеить левее других рисунков, а волка и лису – рядом. Сколько способов может применить она, чтобы наклеить эти рисунки?

1264*. Ученик начертил в тетради произвольный треугольник. Когда он в разных вариантах сложил по две длины сторон, у него получились суммы, равные 16 см, 13 см и 15 см.
- Найдите периметр треугольника.
- Найдите длину каждой стороны треугольника.

1265*. При взвешивании четырех рыб по две штуки во всех возможных вариантах их масса была равна 4 кг, 6 кг, 7 кг, 8 кг, 9 кг и 11 кг.
- Сколько килограммов составляет масса всех рыб?
- Какова масса каждой рыбы?

1266. Решите уравнения:

1) $\dfrac{2(x-9)}{3}=\dfrac{3(x-6)}{4}-\dfrac{x+10}{6}$; 2) $\dfrac{2(x+1)}{3}-\dfrac{3x+7}{12}=\dfrac{5(2x+3)}{8}-2$.

▲ **1241.** 1) 7 вариантов; 2) 6 вариантов. **1243.** 1) • Одно простое число. • Восемь составных чисел. **1244.** 6 отрезков. **1248.** 24 способами. **1251.** 10 вариантов. **1252.** 15 состязаний. **1254.** 10 вариантов. **1255.** 5 вариантов. **1256.** 1) 5; 3) –0,4; 6) 6. **1257.** Четверо друзей. **1258.** 10 вариантов. **1259.** 24 наряда. **1261.** 6 раз. **1264.** • 7 см, 9 см, 6 см. **1265.** • Масса всех рыб 15 кг. • Масса каждой рыбы: 1 кг, 3 кг, 5 кг, 6 кг. **1266.** 1) –2; 2) 0,25.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ VIII

A

1267. Комбайнер в течение пяти дней убирал урожай с площадей в 15,2 га, 16,2 га, 18,6 га, 16,2 га, 17,3 га.
1) Найдите среднюю величину площади, убираемой комбайнером за один день.
2) Вычислите размах изменения площади.
3) Есть ли у данного ряда чисел мода?

1268. **Решите задачу, составив уравнение.** Среднее арифметическое двух чисел равно 43. Первое число больше второго на 13,6. Найдите эти числа.

1269. Ученик, готовясь к урокам, делает домашнее задание по математике, по родному языку и по истории. Сколькими вариантами он может приготовить домашнее задание?

1270. Из пункта A до пункта B можно добраться на катере или на самолете. Из пункта В до пункта C можно доехать на поезде или на автобусе. Сколькими способами можно добраться из пункта A до пункта C через пункт B?

B

1271. Вычислите. Заполните таблицу.

Ряд данных чисел	Среднее арифметическое	Медиана	Размах
9, 7, 4, 6, 3, 7			
2,7; 5,9; 4,2; 3,8; 1,9			
$\frac{1}{2}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$			

1272. При встрече Таня, Меруерт, Назерке, Алихан и Саша обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

1273. Среднее арифметическое скоростей катера по течению и против течения равно 17 км/ч. Скорость катера против течения реки равна 14,5 км/ч. Какова его скорость по течению реки?

1274. Даны числа 1, 3, 8 и 9. Сколько примеров из этих чисел, каждый из которых выражает сумму двух различных чисел, можно составить?

1275. Составьте задачу по «дереву» возможных вариантов, изображенному на рисунке 8.9.

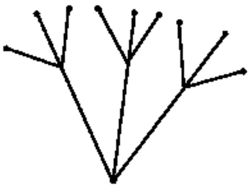


Рис. 8.9

C

1276. Расстояние между двумя городами 420 км. Первую половину пути автобус проехал со скоростью 70 км/ч, а вторую половину – со скоростью 52,5 км/ч. Найдите среднюю скорость автобуса на всем пути.

1277. Среднее арифметическое трех чисел равно 3,2. Среднее арифметическое двух из них равно 2,85. Найдите третье число.

1278. В книжном магазине в продаже имеются 5 разных книг сказок, 3 книги стихов и 2 книги рассказов. Сколькими способами из этих книг можно выбрать одну книгу сказок, одну книгу стихов и одну книгу рассказов?

1279. Сколькими способами можно перевезти 4 человека на трехместной лодке на противоположный берег?

1280. Из класса 2 ученика поют песни, 3 ученика играют на домбре и 2 ученицы танцуют. Сколькими способами можно составить концертную программу из певца, домбриста и танцовщицы?

▲ 1268. 49,8; 36,2. 1272. 10 рукопожатий. 1273. 19,5 км/ч. 1274. 6 примеров. 1276. 60 км/ч. 1277. 3,9. 1278. 30 способами. 1280. 12 способами.

Глава IX. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ВЕЛИЧИНАМИ

9.1. Зависимости между величинами. Задание зависимости между величинами с помощью формул

I. Зависимость между величинами.

В технике, в народном хозяйстве и в повседневной жизни мы часто сталкиваемся с разнообразными величинами: длиной, площадью, объемом, массой, стоимостью, количеством предметов и т. д. При этом в некоторых конкретных ситуациях значения одних величин меняются, а другие остаются неизменными.

Задача.

Велосипедист едет со скоростью 14 км/ч. Какое расстояние он проедет за 2 ч?, за 3 ч?, за 4 ч?

Решение. Запишем формулу нахождения пути по скорости и времени движения:

$$s = v \cdot t.$$

$s = 14 \cdot 2 = 28$ (км) – путь, проделанный велосипедистом за 2 ч.
$s = 14 \cdot 3 = 42$ (км) – путь, проделанный велосипедистом за 3 ч.
$s = 14 \cdot 4 = 56$ (км) – путь, проделанный велосипедистом за 4 ч.

В данном случае такие величины, как путь (s) и время (t), принимают различные числовые значения, а скорость (v) постоянна.

Величина, которая может принимать различные числовые значения, называется переменной величиной.

Значит, по условию задачи, величины путь (s) и время (t) – переменные.

Среди переменных величин различают *независимые переменные* и *зависимые переменные.*

По условию задачи длина пути (s), проделанного велосипедистом со скоростью 14 км/ч, зависит от времени движения (t).

В данном случае время (t) – независимая переменная, а путь (s) – зависимая переменная.

Результаты вычислений показывают, что *каждому значению независимой переменной* (t) *соответствует единственное значение зависимой переменной* (s).

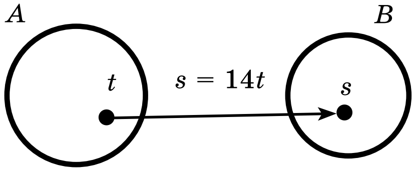


Рис. 9.1

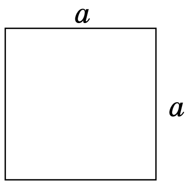
Каждому элементу из множества возможных значений независимой переменной *A* соответствует единственный элемент из множества зависимой переменной *B* (рис. 9.1).

Зависимость между переменными величинами может задаваться формулой, таблицей, графиком.

II. Задание зависимости между величинами с помощью формул.

Задача.

Длина стороны квадрата равна a см. Чему равен периметр (P) квадрата, если $a = 2?$, $5?$, $7?$



Решение.

Запишем формулу периметра квадрата:

$$P = 4a.$$

Если $a = 2$, то $P = 4 \cdot 2 = 8$ (см);
$a = 5$, то $P = 4 \cdot 5 = 20$ (см);
$a = 7$, то $P = 4 \cdot 7 = 28$ (см).

По результатам вычислений видно, что значение периметра (P) квадрата зависит от значения длины его сторон a.

a – независимая переменная, а P – зависимая переменная. Данному значению a соответствует единственное значение P.

Значит, формула $P = 4a$ выражает зависимость периметра квадрата от длины его стороны.

1. Какая величина называется переменной?
2. Приведите примеры, выражающие зависимость между величинами с помощью формул. Укажите зависимую и независимую переменные.
3. Как можно объяснить однозначность значения зависимой переменной?

1281. Назовите независимую и зависимую переменные:

1) $S = 9b$; 3) $V = a^3$; 5) $v = \dfrac{70}{t}$;
2) $C = 85n$; 4) $P = 2(5 + b)$; 6) $c = 2\pi R$.

A

1282. Запишите формулу, устанавливающую зависимость между:
1) объемом (V) куба и длиной его ребра (a);
2) диаметром круга (D) и его радиусом (R).
3) объемом выполненной работы (A) и производительностью труда (v) за 4 часа.
4) стоимостью всей покупки (C) и ценой (a) при покупке 7 марок.

1283. Цветочная клумба имеет форму круга. Ее радиус R м, а площадь S м^2. Задайте формулой зависимость S от R.
Найдите по формуле: 1) S, если $R = 3$;
2) S, если $R = 4$.

1284. Катер плыл по течению реки t часов. Собственная скорость катера 20 км/ч. Скорость течения реки 2,4 км/ч. Какое расстояние (s) проплыл катер за это время?

Запишите формулу зависимости пути (s) от времени движения (t) в случае движения по течению реки.
Вычислите по формуле: 1) s, если $t = 2$;
2) s, если $t = 5$.

1285. Площадь прямоугольника S см^2, длина a см, а ширина b в 3 раза меньше.
Запишите формулу, устанавливающую зависимость между площадью (S) прямоугольника и длинами его сторон a и b.
Пользуясь этой формулой: 1) найдите S, если $a = 6$;
2) найдите S, если $a = 18$.

1286. Решите неравенства:

1) $2x + 3 < x + 1$; 3) $2 - x \leqslant 3x - 10$; 5) $5x + 2 > 3x + 10$;
2) $x - 5 > 3 - x$; 4) $7x - 1 > x + 5$ 6) $7x - 4 \leqslant x + 14$.

B

1287. Из двух сел A и B, удаленных друг от друга на расстояние 92 км, одновременно в одном направлении выехали мотоциклист и велосипедист (рис. 9.2). Скорость велосипедиста 14 км/ч, а скорость мотоциклиста 37 км/ч.

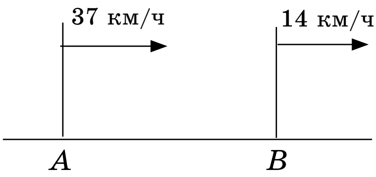


Рис. 9.2

Задайте формулой зависимость расстояния (d) между мотоциклистом и велосипедистом от времени (t) в случае движения вдогонку.
Найдите по формуле: 1) d, если $t = 2$;
2) d, если $t = 3$.
3) Когда произойдет встреча?

1288. В 400 г раствора соленой воды содержится m г соли. Какова концентрация соли ($p\%$) в растворе?
Запишите формулу, устанавливающую зависимость концентрации раствора ($p\%$) от массы (m) растворенного вещества. Пользуясь этой формулой, вычислите:
1) $p\%$, если $m = 72$;
2) $p\%$, если $m = 160$.

1289. Вычислите площадь поверхности куба (S, см^2), если его ребро a см.

Запишите формулу, устанавливающую зависимость площади поверхности куба (S) от длины его ребра a. Пользуясь формулой, вычислите: 1) S, если $a = 3$;
2) S, если $a = 5$.

1290. В саду дети собирали яблоки, груши, персики и урюк. Масса всех собранных фруктов равна 38 кг. Масса собранных яблок и груш равна 25 кг, масса яблок и персиков – 17 кг, а масса яблок и урюка – 16 кг. Сколько килограммов каждого из фруктов собрали дети?

1291. Решите уравнения:

1) $\frac{x}{4}+\frac{x}{3}=\frac{x}{6}+5;$ 2) $\frac{2x}{3}-\frac{4x}{5}=\frac{x}{15}+1;$ 3) $\frac{3x}{8}-\frac{x}{6}=\frac{x}{12}-1.$

C

1292. В банк вложены под простой процентный рост 7 000 000 тг, месячный процентный рост которых составляет 3%. Какая сумма (Sn) будет на счете через n месяцев?
Запишите формулу, устанавливающую зависимость суммы Sn на счете от количества месяцев n в случае, когда деньги вложены под простой процентный рост. Пользуясь этой формулой, найдите:
1) Sn, если $n = 5$;
2) Sn, если $n = 8$.

1293. Из двух сел, находящихся на расстоянии 20 км друг от друга, выехали одновременно в противоположных направлениях два велосипедиста (рис. 9.3).
Один из них ехал со скоростью 15 км/ч, а другой – 10 км/ч.
На каком расстоянии (d) друг от друга будут велосипедисты через t часов?

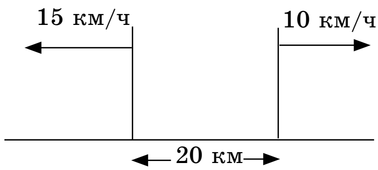


Рис. 9.3

Запишите формулу, устанавливающую зависимость расстояния между велосипедистами (d) от времени (t) в случае движения в противоположных направлениях. Пользуясь этой формулой, найдите:
1) d, если $t = 3$;
2) d, если $t = 5$.

1294*. Числитель дроби $\frac{x}{y}$ увеличили на 200%, а знаменатель уменьшили на 40%. Как изменилась величина дроби?

1295. Используя источники информационно-коммуникационных технологий (ИКТ), запишите радиус Луны. Вычислите длину экватора Луны в километрах (ответ округлите до тысяч).

1284. 2) 112 км. **1285.** 1) 12 см^2. **1286.** 1) $x < -2$; 3) $x \geqslant 3$; 5) $x > 4$. **1288.** 1) 18%. **1289.** 2) 150 см^2. **1290.** 10 кг, 15 кг, 7 кг, 6 кг. **1291.** 1) 12; 2) −5; 3) −8. **1292.** 1) 8 050 000 тг. **1294.** Увеличилась в 5 раз. **1295.** ≈ 10,9 тыс. км.

9.2. Табличный способ задания зависимости между величинами

В некоторых случаях значение независимой переменной и соответствующее ему значение зависимой переменной задаются парой чисел в определенном порядке. Эти числа приводятся в таблице. Такое задание зависимости называется табличным способом задания.

На практике часто зависимость одной величины от другой находят с помощью наблюдений или опытов.

Например, в таблице 1 задана зависимость объема налитой воды (V) от времени работы трубы (t), при производительности в бассейне 1,5 м^3/мин.

Таблица 1

t (мин)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V (м^3)	0	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12	13,5	15

При табличном задании зависимости в одной строчке таблицы записываются значения независимой переменной, а в другой строчке – соответствующие значения зависимой переменной.

Таблица задается с постоянным *шагом*.

Шагом таблицы называют разность между двумя рядом стоящими значениями независимой переменной. Шаг таблицы, предлагаемой выше, равен 1.

Значения независимой переменной берутся только из данных значений или из возможных значений.

1. Как задается зависимость между переменными в табличном способе?
2. Как найти для данного значения независимой переменной соответствующее значение зависимой переменной в табличном способе?
3. Что называют шагом таблицы?

1296. Вычислите цепочку действий (устно):

1) $26 - 40$	2) $-7 - 8$	3) $(-5) \cdot 3$	4) $8 - 12$
$: (-7)$	$\cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$	$\cdot\left(-\frac{1}{15}\right)$	$\cdot \frac{3}{4}$
$- 1\frac{1}{3}$	$- 2{,}5$	$+ \frac{3}{4}$	$+ 2{,}5$
$\cdot 3$	$\cdot 2$	$\cdot (-4)$	$\cdot (-6)$
$- 1{,}8$	$- \frac{7}{8}$	$- \frac{2}{7}$	$\cdot \frac{1}{3}$
?	?	?	?

А

1297. В таблице 2 приведена зависимость массы (m) деревянного бруска от его объема (V).

Таблица 2

V (см^3)	12	18	24	30	36	42
m (г)	8,4	12,6	16,8	21	25,2	29,4

1. Значения какой величины – независимая переменная?
2. Значения какой величины – зависимая переменная?
3. Запишите формулу зависимости массы (m) деревянного бруска от его объема (V).

1298. В таблице 3 приведена зависимость объема прямоугольного параллелепипеда (V), с постоянной площадью основания S см^2, от его высоты (h).

Таблица 3

h (см)	2	4	6	8		12
V (см^3)	442	884			2210	

1) Вычислите площадь основания прямоугольного параллелепипеда.
2) Запишите формулу, устанавливающую зависимость объема прямоугольного параллелепипеда V, с постоянной площадью основания, от его высоты h.
3) Заполните таблицу.

1299. В таблице 4 дана зависимость массы крахмала (m), содержащегося в картофеле, от массы картофеля (M).

Таблица 4

Картофель, M (кг)	1,5	2	2,5	3	3,5		4,5
Крахмал, m (кг)	0,27		0,45		0,63	0,72	

1) Каково процентное содержание крахмала в картофеле?
2) Запишите формулу зависимости массы крахмала (m), содержащегося в картофеле, от массы картофеля (M).
3) Заполните таблицу.

1300. Вычислите:

1) $5 - \dfrac{3}{4 + \dfrac{1}{2}}$; 2) $3 + \dfrac{4}{1 - \dfrac{1}{3}}$; 3) $6 - \dfrac{5}{3 - \dfrac{1}{2}}$; 4) $\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{6 + \dfrac{2}{3}}$.

B

1301. Катер отплыл от пристани A и проплыл против течения t ч. Собственная скорость катера 25 км/ч. В таблице 5 дано расстояние s, пройденное катером за t ч:

Таблица 5

t (ч)	1		3	4
s (км)	23	46		

1) Какова скорость течения реки?
2) Задайте формулой зависимость s от t.
3) Заполните таблицу.
4) Какое самое большое расстояние проплыл катер?

1302. Спортсмен пробежал дистанцию 500 м со скоростью 10 м/с. На каком расстоянии (d) от финиша был спортсмен через t секунд? Заполните таблицу 6.

Таблица 6

t (с)	0	10	20	30	40	50
d (м)						

1) За сколько секунд спортсмен пробежал дистанцию и пришел к финишу?
2) Запишите формулу, устанавливающую зависимость расстояния до финиша (d) от времени (t).

1303. Тракторист работал на вспашке зяби с 9 до 14 часов с производительностью 2 га/ч.

1) Составьте таблицу зависимости объема работы тракториста (A) от времени работы (t) при постоянной производительности (v).

2) Запишите формулу, устанавливающую указанную зависимость.

1304. Площадь основания аквариума, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, равна 4,2 дм^2. Высота его 6 дм. В таблице 7 дана зависимость объема воды в аквариуме (V дм^3) от уровня его высоты (h дм).

Таблица 7

Уровень воды (h дм)	1	2		4	5
Объем воды (V дм^3)	4,2	8,4	12,6		

1) Заполните таблицу.

2) Запишите формулу, устанавливающую зависимость объема воды в аквариуме (V) от уровня его высоты (h).

1305. Решите уравнения:

1) $\dfrac{6}{|x-5|} = 2;$ 2) $\dfrac{|7-x|}{4} = 3;$ 3) $\dfrac{4}{|2x+1|} = 0,8.$

C

1306. В таблице 8 дана зависимость расстояния (s), преодоленного велосипедистом, от числа оборотов колеса (n) велосипеда.

Таблица 8

n (число оборотов)	20	40	60	80	100	120
s (м)	31,4	62,8				188,4

1) Вычислите диаметр колеса велосипеда.

2) Запишите формулу, устанавливающую зависимость расстояния (s), преодоленного велосипедистом, от числа оборотов колеса (n) велосипеда.

3) Заполните таблицу.

1307. Два автомобиля, расстояние между которыми 120 км, выехали навстречу друг другу. В таблице 9 дана зависимость расстояния между ними (d) от времени движения (t).

Заполните таблицу.

Таблица 9

t (мин)	0	10	20		40		60
d (км)	120	100	80	60		20	0

1) Найдите скорость сближения автомобилей.
2) Какова скорость второго автомобиля, если скорость первого 0,9 км/мин?
3. Запишите формулу зависимости расстояния между ними (d) от времени движения.

1308. К 400 г 30%-ного сахарного сиропа добавили 200 г воды. Какова концентрация полученного раствора?

1309. Вычислите:

$$\frac{\left(4,35-\left(\frac{4}{45}+\frac{5}{18}\right):4,4\right):0,32}{(20-0,68):8,05+2\frac{2}{45}}.$$

1300. 2) 9; 4) 1. **1305.** 2) –5; 19. **1306.** 1) 0,5 м. **1307.** 2) 1,1 км/мин. **1308.** 20%. **1309.** 3.

О декартовых переменных величинах

В XVII–XVIII веках широкое развитие получила промышленность, были достигнуты большие успехи в науке. В это же время было изучено движение планет и совершены крупные исследовательские экспедиции на морях и океанах.

Наукой было определено, что природа находится в постоянном движении и изменении. В связи с этим математика как наука стала изучать зависимости между переменными величинами в природе. Таким образом, в математике появилось понятие о переменных величинах.

Французские математики Рене Декарт (1596–1650) и Пьер Ферма (1601–1665) первыми ввели в математику понятие о переменных величинах. Р. Декарт в своем труде «Геометрия» (вышел в свет в 1637 году) использовал понятие о переменных величинах. Исследование о переменных величинах, начатое Р. Декартом, было продолжено великими математиками XVII–XVIII веков И. Ньютоном (1643–1727) и Г.В. Лейбницем (1646–1716). И. Ньютон определил, что координаты движущейся точки находятся в зависимости от времени ее движения.

Это означает, что с введением понятия о переменных величинах началось бурное развитие математики как науки, изучающей количественные отношения и пространственные формы объектов, существующих в природе.

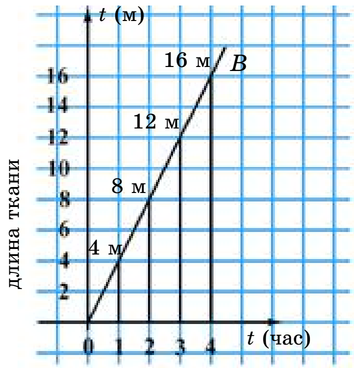


Рис. 9.4

На рисунке 9.4 дан график работы ткацкого станка, который в час производит 4 м ткани, и также указано, сколько метров ткани производит ткацкий станок за 2 ч; за 3 ч; за 4 ч.
Построена прямоугольная система координат. По оси абсцисс показано время работы станка, по оси ординат – длина производимой ткани. Прямая *AB* на координатной плоскости показывает зависимость длины производимой ткани от времени работы ткацкого станка.

9.3. Графический способ задания зависимости между величинами

Зависимость между величинами может быть задана с помощью специальных рисунков (чертежей), которые называются *графиками*.

По графику можно узнать изменение температуры воздуха; изменение расстояния в зависимости от времени и скорости; зависимость стоимости товара от его количества и цены; зависимость объема выполненной работы от производительности труда и т. д.

Для построения графика зависимости между величинами используется прямоугольная (декартова) система координат – Oxy. На координатной плоскости Oxy значения независимой переменной изображаются на оси абсцисс (Ox), а значения зависимой переменной – на оси ординат (Oy).

Графиком зависимостей между величинами **называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты – соответствующими значениями зависимой переменной.**

Если дан график зависимости величин, то по заданному значению одной величины можно найти соответствующее значение другой.

Пример 1. Масса 1 дм^3 сосны 0,5 кг. Вычислим массу 2 дм^3, 3 дм^3, 4 дм^3, 5 дм^3 сосны (табл. 10) и построим график.

Таблица 10

Объем, V (дм^3)	1	2	3	4	5
Масса, m (кг)	0,5	1	1,5	2	2,5

Построим прямоугольную систему координат. По оси абсцисс откладываем значения объема, по оси ординат – значения массы (рис. 9.5). Отметим на координатной плоскости точки: $A(1;\ 0{,}5)$, $B(2;\ 1)$, $C(3;\ 1{,}5)$, $D(4;\ 2)$, $E(5;\ 2{,}5)$. Соединив точки отрезками, получим график зависимости массы от объема.

Используя график, можно найти, что сосна объемом 3 дм^3 имеет массу 1,5 кг, а сосна массой 2 кг имеет объем 4 дм^3.

Пример 2. На рисунке 9.6 изображен график роста стебля подсолнечника в течение 6 недель.

Найдем по графику высоту стебля подсолнечника через 4 недели.

Для этого:

1) через точку оси абсцисс (Ox) с координатой 4 проведем перпендикуляр к этой оси;

2) найдем точку $A(4;\ 70)$ пересечения перпендикуляра с графиком данной зависимости.

Ордината точки A, равная 70, является искомым значением зависимой переменной: $A(4;\ 70)$.

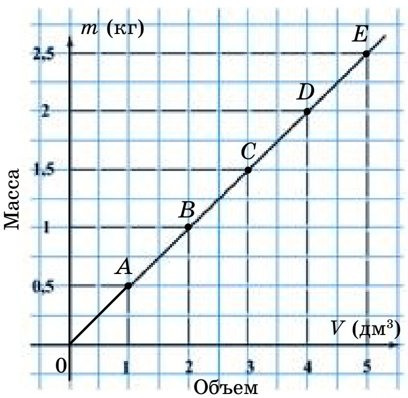


Рис. 9.5

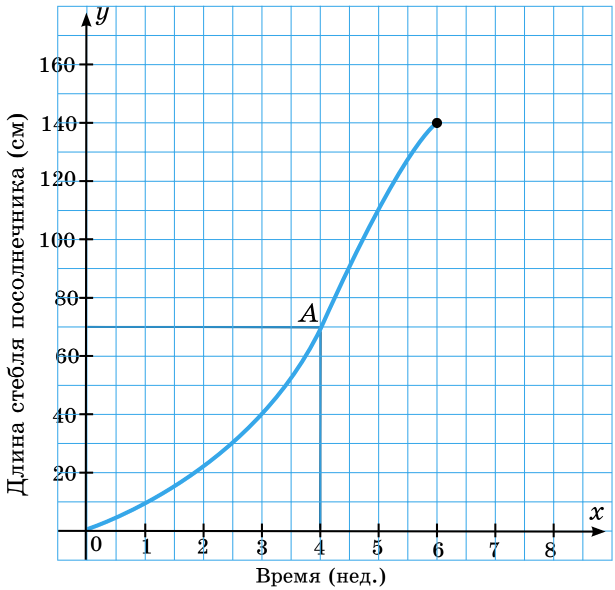


Рис. 9.6

Значит, высота стебля подсолнечника через 4 недели будет равна 70 см.

В метеорологических учреждениях используется специальный прибор *термограф*, который записывает температуру воздуха на ленту в течение суток.

Для контроля колебаний земной поверхности используется прибор *сейсмограф*. Он записывает колебания земной поверхности в виде графика – сейсмограммы и дает возможность заранее определить моменты начала землетрясения, цунами.

Врач исследует сердечные болезни с помощью графика сердцебиений – кардиограммы. Экономисты исследуют график производства одного определенного вида продукции.

Графики широко используются в народном хозяйстве, науке, исследованиях, при контрольных измерениях.

1. Чем изображается на координатной плоскости зависимость между величинами?
2. Что называется графиком зависимостей между величинами?
3. Приведите примеры о наблюдении за изменением величины с помощью графика.

1310. Приведите подобные слагаемые:

1) $6x-\frac{3}{7}x$; 3) $\frac{2}{5}x+x$; 5) $\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}x-\frac{1}{2}x$;

2) $\frac{5}{8}y-y$; 4) $7{,}5y-7y$; 6) $\frac{4}{9}y+\frac{5}{9}y-\frac{1}{3}y$.

A

1311. На рисунке 9.7 изображен график движения поезда со скоростью 70 км/ч. По графику ответьте на вопросы:

1) Какое расстояние прошел поезд за 2 ч?

2) За какое время поезд прошел расстояние, равное 210 км?

3) Запишите формулу, устанавливающую зависимость между пройденным расстоянием (s) и временем движения (t) при постоянной скорости 70 км/ч.

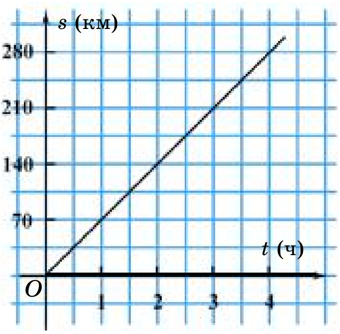


Рис. 9.7

1312. На рисунке 9.8 изображен график зависимости стоимости яблок от их массы при постоянной цене (a = 100 тг).

1) Сколько килограммов яблок можно купить на 150 тг?

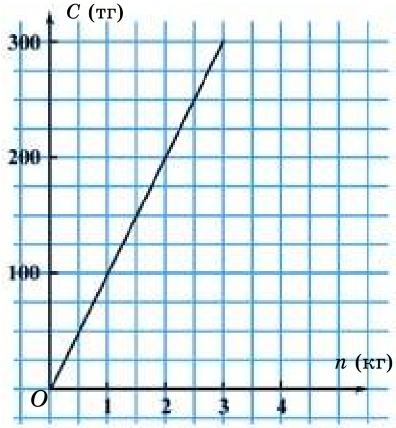


Рис. 9.8

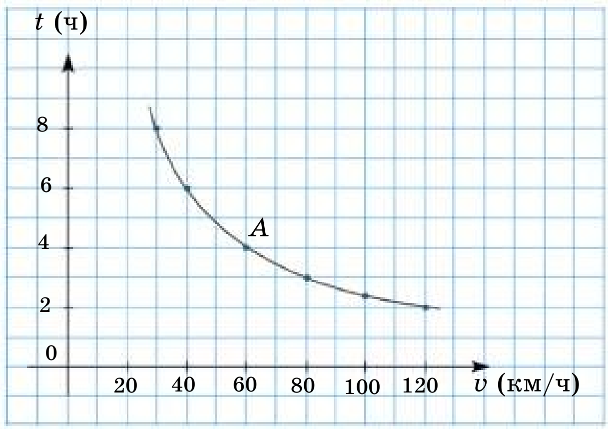


Рис. 9.9

2) Сколько тенге надо заплатить, чтобы купить 3 кг яблок?
3) Запишите формулу, устанавливающую зависимость стоимости (C) от количества товара (n) при постоянной цене (a).

1313. Катер плыл 3 ч по озеру со скоростью 20 км/ч. В таблице 11 показана зависимость длины пути (s) от времени движения катера (t).

Таблица 11

Время, t (час)	1	2	3
Пройденный путь, s (км)	20		

1) Заполните таблицу.
2) Используя таблицу, постройте график движения катера.
3) Запишите формулу, устанавливающую зависимость длины пути (s) от времени движения (t) при постоянной скорости 20 км/ч.

1314. На рисунке 9.9 изображен график зависимости времени движения (t) поезда от его скорости (v) на расстоянии, равном 240 км. По графику:
1) Найдите координаты точки A. Что они означают по содержанию задачи?
2) Запишите формулу зависимости времени движения (t) поезда от его скорости (v) при постоянном расстоянии.

1315. Составьте таблицу и постройте график зависимости площади квадрата (S см^2) от длины его стороны (a см), если $a = 1;\ 2;\ 3$.

Запишите формулу зависимости площади квадрата (S) от длины его стороны (a).

1316. Отношение двух чисел равно 1 : 4. Если к первому числу прибавить 40, то их отношение будет равно 3 : 4. Найдите эти числа.

1317. Решите уравнения:

1) $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{9-x}{3}$; 2) $\dfrac{8+x}{7}=\dfrac{3x-5}{6,5}$; 3) $\dfrac{7x+9}{2,5}=\dfrac{5x-2}{6}$; 4) $\dfrac{0,6}{x-3}=\dfrac{2,1}{x+2}$.

B

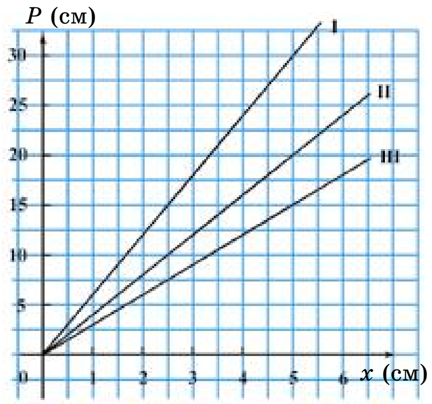


Рис. 9.10

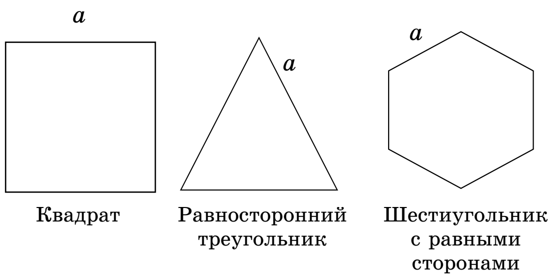


Рис. 9.11

1318. На рисунке 9.10 изображены графики зависимости периметра (P) от длины сторон фигур, изображенных на рисунке 9.11.
1) Определите график каждой фигуры в отдельности.
2) Задайте каждый график формулой.

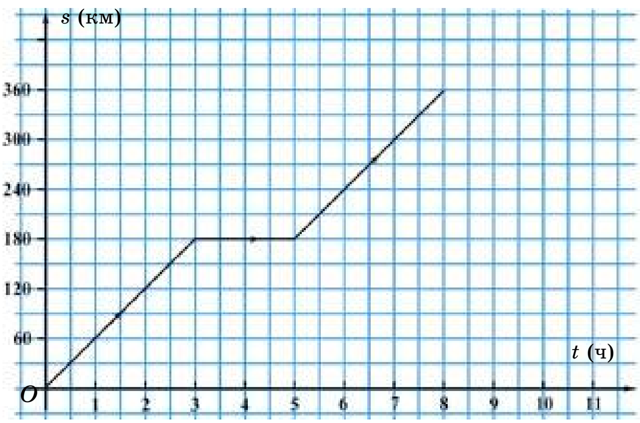


Рис. 9.12

1319. На рисунке 9.12 изображен график движения автомобиля при постоянной скорости.
1) На каком расстоянии находился автомобиль через 3 ч; через 6 ч после начала движения?

2) За какое время автомобиль проехал расстояние, равное 300 км?

3) Найдите среднюю скорость движения автомобиля.

1320. Николай ехал на велосипеде со скоростью 6 км/ч. Саша шел пешком со скоростью 4 км/ч.

1) Заполните таблицу 12, вычислив расстояние, преодоленное Николаем и Сашей за 1 ч; 2 ч; 3 ч.

Таблица 12

Время (ч)	1	2	3
Путь, преодоленный Николаем (км)			
Путь, пройденный Сашей (км)			

2) Постройте на одной координатной плоскости графики движения Николая и Саши.

3) Какой график расположен выше, какой – ниже? Почему?

1321. Из города A в город B, расстояние между которыми 240 км, одновременно выехали автобус и легковая машина. На рисунке 9.13 изображены графики их движения.

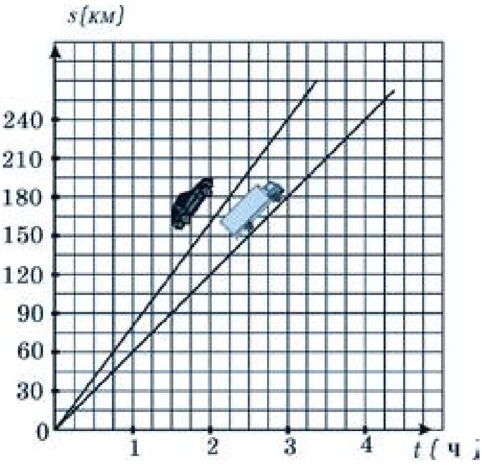


Рис. 9.13

По графику:

1) Найдите скорость легковой машины и скорость автобуса.

2) Запишите в виде формулы зависимость длины пути (s) легковой машины от времени ее движения (t).

3) Запишите в виде формулы зависимость длины пути (s) автобуса от времени его движения (t).

4) На сколько часов раньше легковая машина прибыла в город B, чем автобус?

1322. Решите задачу, составив уравнение.

У Димы и Саши всего было 570 тенге. На $\frac{1}{4}$ своих денег Дима купил альбом, а Саша на $\frac{1}{6}$ своих денег купил книгу. После этого у каждого из них осталась одинаковая сумма денег. Сколько тенге было у Димы первоначально?

1323. Решите уравнения:

1) $\frac{x+1}{2}=\frac{2x-3}{5}+2$;

2) $\frac{11-3x}{4}=\frac{x+13}{6}-x$;

3) $\frac{5x+8}{9}+x=\frac{7x+10}{6}$;

4) $\frac{2\cdot(2-3x)}{5}+1=\frac{3-4x}{3}$.

C

1324. На рисунке 9.14 изображен график зависимости объема V (м^3) воды от времени t (мин) наполнения бассейна насосом. По графику ответьте на вопросы:

1) На сколько минут выключался насос в процессе работы?

2) Сколько воды (м^3) закачивал насос в бассейн каждую минуту до выключения?

3) Сколько воды (м^3) закачивал насос в бассейн каждую минуту после повторного включения?

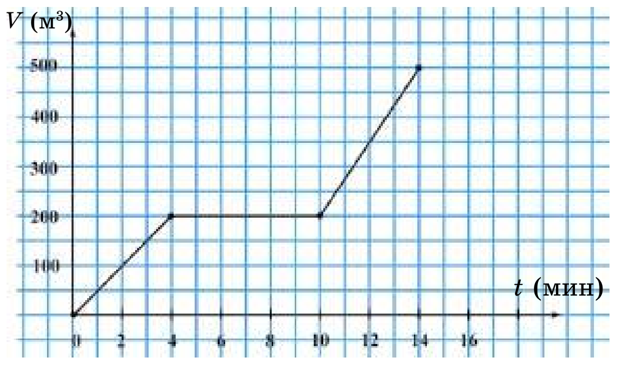


Рис. 9.14

1325. Из города в населенный пункт выехал первый автомобиль со скоростью 60 км/ч. Час спустя вслед за ним выехала легковая машина со скоростью 90 км/ч. На одной и той же координатной плоскости постройте графики движения автомобиля и легковой машины. (В тетради две клетки принять за 30 км.) По графику найдите, на каком расстоянии от города легковая машина догонит автомобиль.

1326. На рисунке 9.15 изображен график движения катера от пристани A до пристани B и обратно. По графику ответьте на вопросы:

1) Каково расстояние между пристанями A и B?

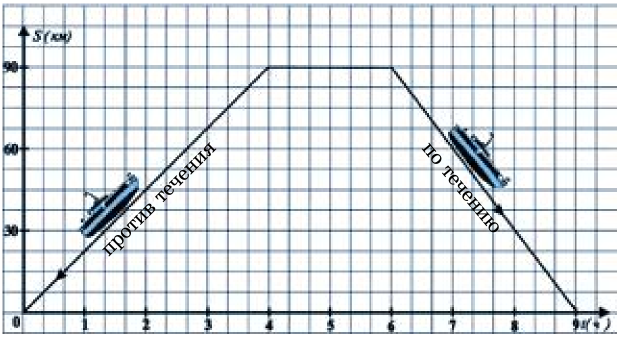


Рис. 9.15

2) Какова скорость катера против течения?
3) Какова скорость катера по течению?
4) Какова собственная скорость катера?
5) Какова скорость течения?

1327*. Решите задачу рациональным способом.

В гирлянде были синие, желтые и красные шары. $\frac{3}{4}$ всех шаров в гирлянде без 9 были синими, $\frac{1}{2}$ оставшихся шаров и 3 шара были желтыми, а остальные 5 – красными.

- Сколько всего шаров в гирлянде?
- Сколько синих шаров в гирлянде?

> **1317.** 1) 6,6; 2) 6; 3) –2; 4) 5. **1319.** 3) 45 км/ч. **1322.** У Димы было 300 тг. **1323.** 1) 9; 2) –7; 3) 2; 4) –6. **1324.** 2) 50 м^3; 3) 75 м^3. **1326.** 4) 26,25 км/ч; 5) 3,75 км/ч. **1327.** • Всего 28 шаров. • 12 синих шаров.

9.4. Исследование зависимостей между величинами с использованием графиков реальных процессов

В производстве, технике и научных работах часто возникают ситуации, в которых, исследуя графики реальных процессов, устанавливаются зависимости между величинами.

Изучение общих свойств зависимостей между величинами с помощью графиков помогает найти ответ на вопрос: «Что будет происходить при тех или иных обстоятельствах?».

Пример 1. На рисунке 9.16 показан график изменения ветра в течение суток 21 марта.

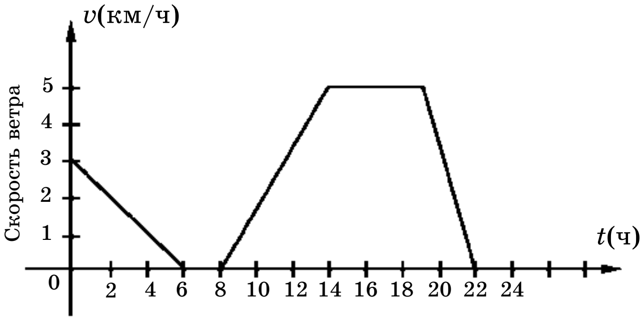


Рис. 9.16

По графику можно определить, что:

1) наибольшая скорость ветра достигает 5 м/с;

2) с 14 ч до 19 ч ветер дул с наибольшей скоростью 5 м/с;

3) с 6 ч до 8 ч и с 22 ч до 24 ч ветра не было.

Таким образом графики описывают огромное число практических ситуаций.

Пример 2. На рисунке 9.17 изображен график температуры воздуха в течение суток.

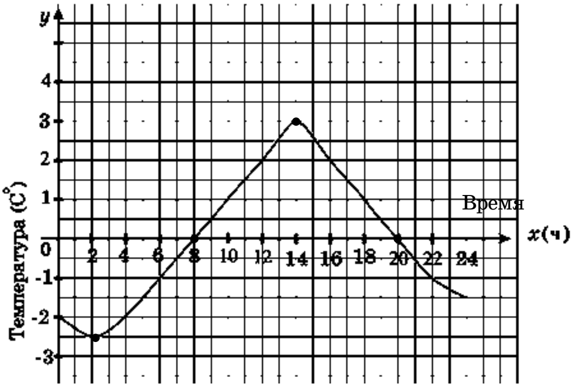


Рис. 9.17

По графику можно определить следующее:

1) в 8 ч и в 20 ч температура воздуха была 0°С;

2) в течение суток зафиксирована самая высокая температура воздуха 3°С, самая низкая −2,5°С;

3) с 2 ч до 14 ч температура воздуха повышалась, а с 0 ч до 2 ч и с 14 ч до 24 ч понижалась.

4) с 8 ч до 20 ч температура воздуха выражена положительными числами (выше 0°С), с 0 ч до 8 ч и с 20 ч до 24 ч – отрицательными (ниже 0°С).

В данном случае с помощью графика температуры воздуха в течение суток мы смогли определить самую высокую и самую низкую температуру, положительные и отрицательные значения температуры.

1. Чем изображается зависимость между величинами в прямоугольной системе координат?
2. Для изображения графика движения какая величина откладывается на оси абсцисс, а какая – на оси ординат?
3. Приведите примеры наблюдений за изменением величины с помощью графика.

1328. Вычислите устно:

1) $(-2)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$; 3) $(-3)^3 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)$; 5) $(-2)^4 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)$;

2) $(-3)^2 \cdot \frac{1}{6}$; 4) $(-5)^2 \cdot \frac{5}{2}$; 6) $(-6)^2 \cdot \frac{4}{9}$.

A

1329. На рисунке 9.18 изображен график зависимости роста ребенка от его возраста.

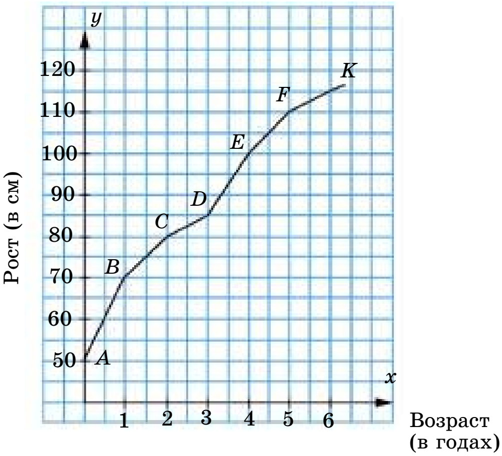


Рис. 9.18

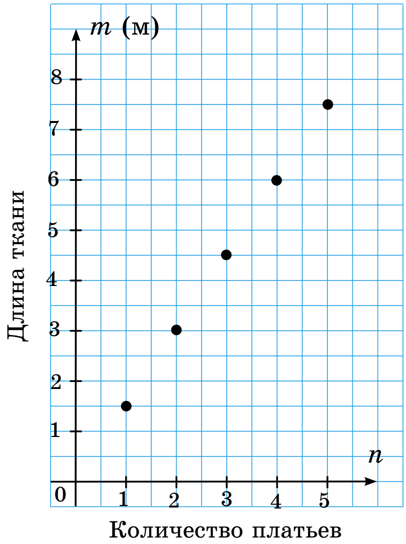


Рис. 9.19

По графику ответьте на вопросы:
1. Каков смысл значения координат точки $D(3; 85)$?
2. Рост ребенка 70 см. Сколько ему лет?

1330. На рисунке 9.30 дан график зависимости длины расхода ткани (m) от количества сшитых платьев (n). По графику определите:
1) Количество сшитых платьев.
2) Сколько метров ткани израсходовали для пошива всех платьев?
3) Сколько метров ткани ушло на пошив одного платья?

1331. В таблице 13 задана зависимость температуры воды (t°C) при ее нагревании от времени нагревания t (мин).

Таблица 13

t (мин)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
t°C	18	45	62	75	84	92	97	99	100

Используя таблицу, начертите график зависимости температуры t°C воды от времени t (мин) ее нагревания. Далее, используя график, ответьте на следующие вопросы.
1) На сколько градусов изменилась температура воды в первые 3 мин?
2) Через сколько минут после нагревания температура достигла 100°C?

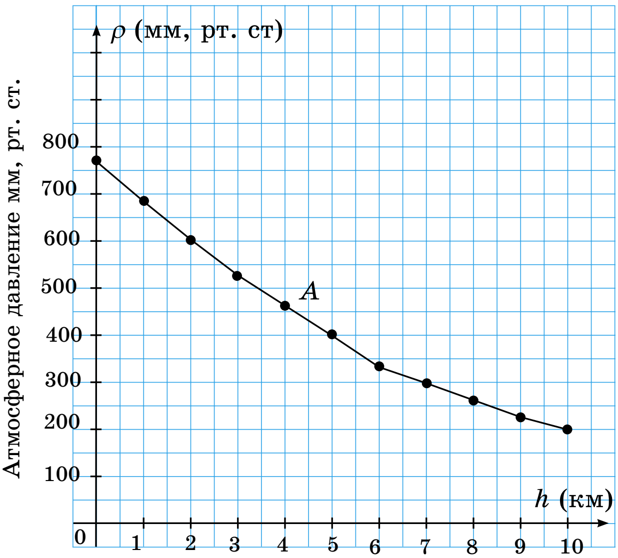


Рис. 9.20

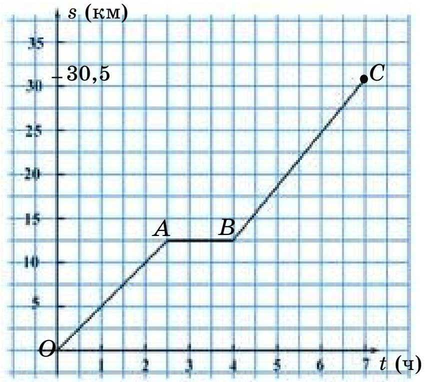


Рис. 9.21

1332. На рисунке 9.20 изображен график зависимости атмосферного давления p (мм рт. ст.) от высоты (h) над уровнем Мирового океана. Пользуясь графиком, определите значение атмосферного давления:
1) На вершине пика Хан Танири, высота которого 6995 м (≈7000 м).
2) На вершине пика Талгар, высота которого 4973 м (≈5000 м).

1333. Найдите x в пропорциях:

1) $\dfrac{2}{3} = \dfrac{x+1}{7,5}$; 2) $\dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{4x+3,5}$; 3) $\dfrac{7x+3}{18} = \dfrac{3}{4}$.

B

1334. На рисунке 9.21 изображен график движения путешественника в течение 7 часов.
1) Сколько часов отдыхал путешественник?
2) С какой скоростью шел путешественник до отдыха?
3) С какой скоростью шел путешественник после отдыха?
4) Запишите формулу, устанавливающую зависимость между пройденным расстоянием и временем движения для каждого участка пути в отдельности.

1335. На рисунке 9.22 изображен график изменения температуры воды при ее нагревании, полученный опытным путем.

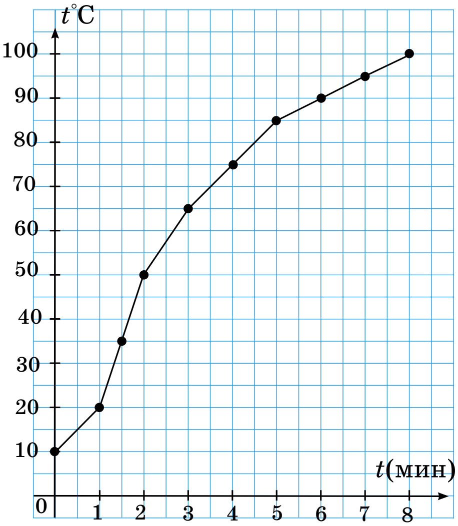


Рис. 9.22

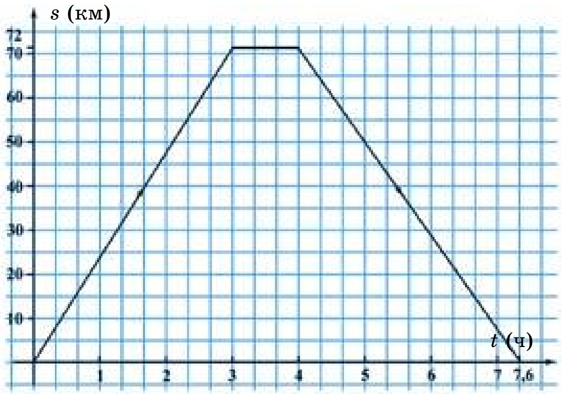
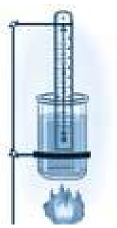


Рис. 9.23



По графику ответьте на вопросы:

1) Чему равна первоначальная температура воды в сосуде?

2) Через сколько минут вода в сосуде закипела?

3) На сколько градусов поднялась температура воды в сосуде через 3 минуты после нагревания по сравнению с первоначальной температурой?

1336*. На рисунке 9.23 изображен график движения катера по реке. Катер плыл от пункта A до пункта B и, остановившись там на 1 ч, вернулся обратно в пункт A. На все это он потратил 7,6 ч. Используя график, вычислите:

1) Скорость катера по течению реки.

2) Скорость катера против течения реки.

3) Скорость течения реки.

1337. У Аскара есть желтая и зеленая рубашки, синие и черные брюки, серые, коричневые и белые туфли. Сколько у него вариантов одеться?

1338. Вычислите, выразив дроби в натуральных числах:

1) $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}$; 2) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}{\frac{7}{8}-\frac{2}{3}-\frac{1}{12}}$; 3) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}-\frac{5}{9}-\frac{1}{18}}$.

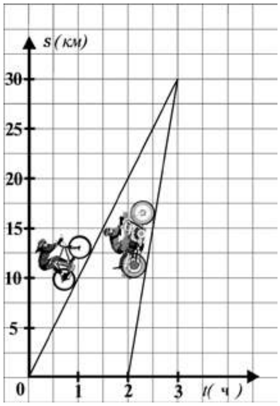


Рис. 9.24

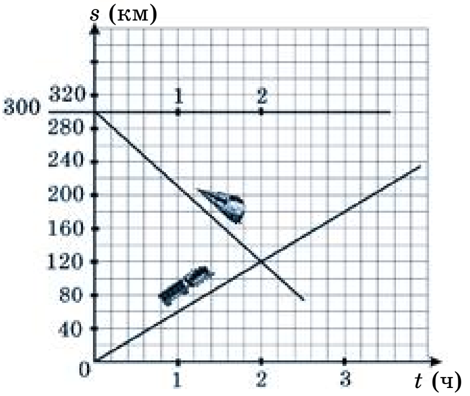


Рис. 9.25

C

1339. Из пункта A выехал велосипедист. Спустя 2 ч после выезда велосипедиста из этого же пункта выехал мотоциклист, который через час догнал велосипедиста (рис. 9.24).
По графику найдите:
1) Скорость велосипедиста.
2) Скорость мотоциклиста.
3) Определите, на каком расстоянии от пункта A они встретились.
4) Запишите формулу, устанавливающую зависимость между пройденным расстоянием и временем движения для велосипедиста; для мотоциклиста.

1340. Из двух городов, расстояние между которыми 300 км, одновременно навстречу друг другу вышли товарный и пассажирский поезда. На рисунке 9.25 изображены графики движения этих поездов.
Определите по графику:
1) Через сколько часов поезда встретились на одной и той же станции?
2) Какова скорость пассажирского поезда?
3) Какова скорость товарного поезда?
4) Запишите формулу, устанавливающую зависимость расстояния d между пассажирским и товарным поездами от времени встречного движения.

1341. Решите уравнения: 1) $\dfrac{\dfrac{4}{\frac{2}{7}+2}-x}{2x-\dfrac{1}{4}}=6$; 2) $\dfrac{\dfrac{x-5}{3}-\dfrac{x-7}{4}}{\dfrac{x+5}{6}-\dfrac{x+7}{3}}=-\dfrac{3}{4}$.

1333. 3) 1,5. **1335.** 3) На 55°С. **1336.** 3) 2 км/ч. **1337.** 12 вариантов. **1338.** 1) 19; 2) 10; 3) 1,5. **1341.** 1) 0,25; 2) −25.

9.5. Прямая пропорциональность и ее график

I. Прямая пропорциональность.

При наблюдении за изменениями различных величин нам стало известно, что существуют зависимости, при которых, если значение одной величины увеличивается (уменьшается) в несколько раз, то соответствующее значение другой величины увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Путь (s км), пройденный поездом за t часов с постоянной скоростью 70 км/ч, вычисляется по формуле

$$s = 70t, \text{ где } t > 0.$$

Путь (s) при постоянной скорости прямо пропорционален времени движения (t).

Пример 2. Стоимость n тетрадей по цене 35 тг вычисляется по формуле

$$C = 35n, \text{ где } n \in N.$$

Стоимость товара (C) прямо пропорциональна его количеству (n) при постоянной цене.

Пример 3. Периметр квадрата со стороной a см вычисляется по формуле

$$P = 4a, \text{ где } a > 0.$$

Периметр квадрата (P) прямо пропорционален длине (a) стороны квадрата.

Во всех этих примерах зависимость между величинами можно задать формулой

$$y = kx,$$

где x – значение независимой переменной, y – соответствующее значение зависимой переменной, k – не равное нулю число.

Зависимость между переменными x и y, которую можно задать формулой $y = kx$, называется *прямой пропорциональностью*. k – коэффициент пропорциональности, причем $k \neq 0$.

Если $y_1 = kx_1$ и $y_2 = kx_2$, то

$$\frac{y_1}{x_1} = k; \quad \frac{y_2}{x_2} = k.$$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Величины y_1, x_1, y_2, x_2 образуют пропорцию.

Согласно равенству $y = kx$, каждому рациональному числу x соответствует единственное число y.

Прямая пропорциональность $y = kx$ – это зависимость, область определения и область значений которой являются множеством рациональных чисел.

II. График прямой пропорциональности. Построим график прямой пропорциональности $y = 2x$. Составим таблицу значений этой прямой пропорциональности с шагом 1.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2x$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

Отметим точки с вычисленными координатами $(x; y)$ на координатной плоскости Oxy (рис. 9.26).

Можно заметить: отмеченные точки принадлежат некоторой прямой, проходящей через начало координат – точку $O(0; 0)$. Проведем эту прямую. Получим график прямой пропорциональности $y = 2x$.

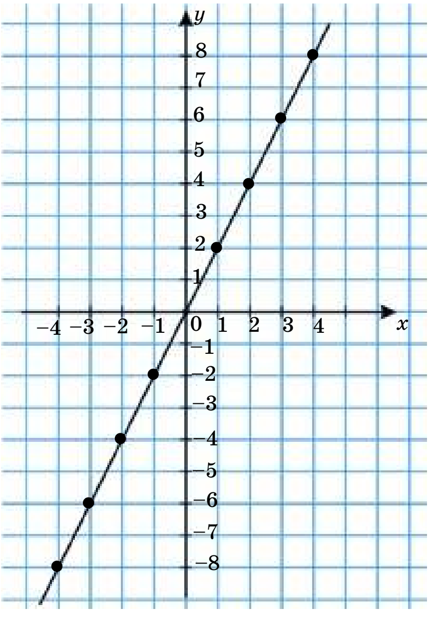


Рис. 9.26

Вывод.

Графиком прямой пропорциональности $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат.

Итак, для построения графика прямой пропорциональности достаточно знать координаты двух точек, одна из которых – начало координат, точка $O(0; 0)$.

Построим график прямой пропорциональности $y = -\frac{3}{4}x$.

Для этого:

1. Найдем координаты одной точки по формуле $y = -\frac{3}{4}x$.

Если $x = 8$, то $y = -\frac{3}{4} \cdot 8 = -6$; $y = -6$.

2. На координатной плоскости отметим точку с координатами $(8; -6)$;

3. Через точки $(8; -6)$ и начало координат $O(0; 0)$ проведем прямую (рис. 9.27). Эта прямая и является графиком прямой пропорциональности $y = -\frac{3}{4}x$.

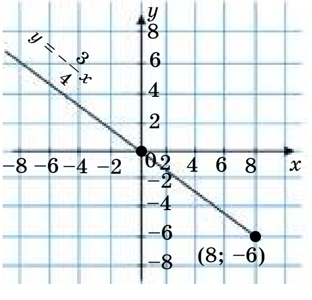


Рис. 9.27

Расположение графика прямой пропорциональности $y = kx$ на координатной плоскости Oxy зависит от коэффицента k. На рисунке 9.28 изображены графики прямой пропорциональности

$y = kx$ с различными значениями k. При $k > 0$ график прямой пропорциональности $y = kx$ располагается в первой и третьей, а при $k < 0$ – во второй и четвертой координатных четвертях.

Если $k > 0$, график прямой пропорциональности $y = kx$ образует с положительным направлением оси Ox острый угол, а если $k < 0$ – тупой угол. *Коэффицент k называется угловым коэффицентом.*

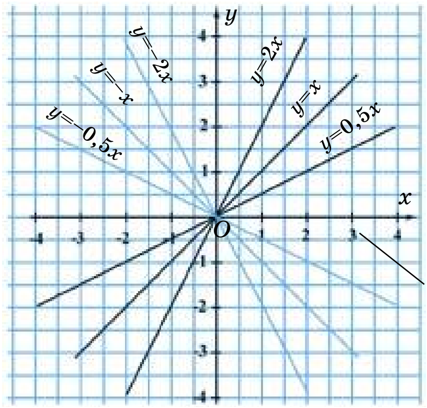


Рис. 9.28

1. В каком случае зависимость двух величин x и y называется прямой пропорциональностью?
2. Что является графиком прямой пропорциональности $y = kx$?
3. Какое наименьшее количество точек нужно отметить на координатной плоскости для построения графика прямой пропорциональности?

1342. Чему равно значение k (устно):

1) $y = 1{,}6x$; 3) $y = -\frac{3}{4}x$; 5) $y = x$; 7) $y = 9x$;

2) $y = -3{,}5x$; 4) $y = -x$; 6) $y = 0{,}3x$; 8) $y = -10x$?

A

1343. Определите, является ли зависимость между величинами прямой пропорциональностью:
1) Количество станков и количество выработанных ими изделий за определенное время при одинаковой производительности станков.
2) Площадь прямоугольника и его длина, если ширина постоянна.
3) Длина ребра куба и его объем.
4) Масса воды и ее объем.
5) Рост человека и его возраст.
6) Площадь круга и его радиус.

1344. Постройте графики прямой пропорциональности:

1) $y = 2x$;

x	0	2
y		

2) $y = -x$;

x	0	1
y		

3) $y = -\frac{1}{3}x$;

x	0	3

4) $y = -2{,}5x$;

x	0	2
y		

5) $y = -4x$;

x	0	1
y		

6) $y = \frac{3}{4}x$;

x	0	4

1345. 1) Запишите формулу прямой пропорциональной зависимости объема (V) прямоугольного параллелепипеда и высоты (C) при постоянной площади основания, равной 25 дм^2.

2). Запишите формулу прямой пропорциональной зависимости длины обода (C м) колеса от его радиуса (R), если $R = 0{,}5$ м.

1346. Прямая пропорциональность задана таблицами:

1)

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
y					-4		

2)

x	-9	-6	-3	0	3	6	9
y		-3		0			

1) Вычислите коэффицент пропорциональности.
2) Заполните таблицы.
3) Запишите формулы прямой пропорциональности.

1347. Решите уравнения:

1) $\dfrac{6}{3+|x|} = 1{,}5$; 2) $\dfrac{12}{1+|x|} = 3$; 3) $\dfrac{28}{3+|x|} = 4$; 4) $\dfrac{56}{10-|x|} = 7$

B

1348. Выпишите формулы прямой пропорциональности:

1) $y = -12x$; 3) $y = -3x$; 5) $y = \dfrac{9}{x}$; 7) $y = 15x$;

2) $y = -\dfrac{7}{2x}$; 4) $y = 0{,}8x$; 6) $y = -\dfrac{2}{5}x$; 8) $y = \dfrac{5}{x+3}$.

1349. Постройте графики прямой пропорциональности:

1) $y = 1{,}4x$; 3) $y = 1{,}5x$; 5) $y = -\dfrac{1}{5}x$; 7) $y = 0{,}8x$;

2) $y = 3x$; 4) $y = 3{,}5x$; 6) $y = -\dfrac{1}{4}x$; 8) $y = -\dfrac{5}{6}x$.

1350. На рисунке 9.29 изображен график движения плота.
1) По графику определите скорость движения плота.
2) Что представляет собой график движения плота: прямую, отрезок или луч? Дайте пояснение.
3) Задайте формулой данную зависимость.

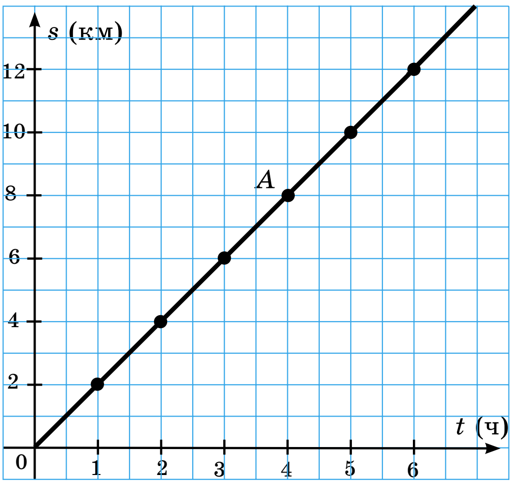


Рис. 9.29

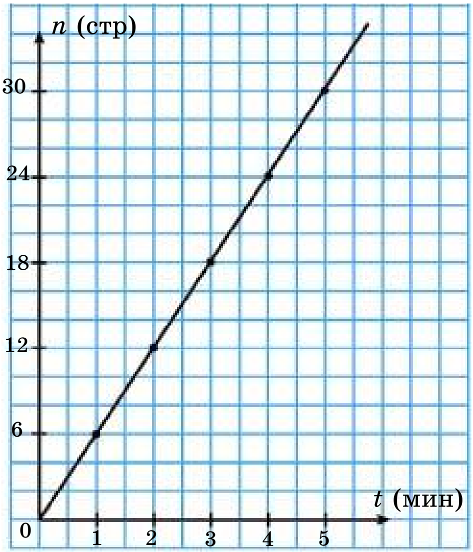


Рис. 9.30

1351. На рисунке 9.30 изображен график прямой пропорциональной зависимости количества (n) распечатанных страниц на принтере от времени (t) распечатки.

1) За сколько времени принтер распечатает 18 страниц?

2) По графику определите коэффициент пропорциональности.

3) Запишите формулу, описывающую зависимость между количеством (n) напечатанных страниц и временем (t) распечатки.

1352. Даны точки: 1) $A(2;\ 5)$; 2) $A(-2;\ 4)$; 3) $A(3;\ -2)$.

а) Постройте график прямой пропорциональности $y = kx$, проходящий через точку A.

б) По графику найдите значение k для каждой прямой.

в) Для каждой прямой запишите формулу прямой пропорциональности.

1353. На рисунке 9.31 изображены графики прямой пропорциональности: прямые *а*, *б*, *в*.

Для каждого графика:

1) Определите коэффициент пропорциональности.

2) Запишите формулу прямой пропорциональности.

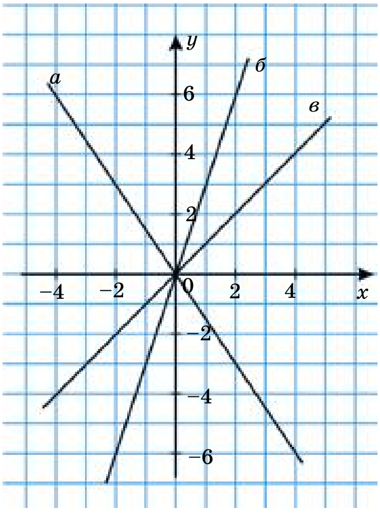


Рис. 9.31

C

1354. Постройте на одной координатной плоскости два графика прямой пропорциональности $y = kx$, один из которых проходит через точку A, а другой – через точку B.
а) $A\ (-2;\ 3)$, $B\ (2;\ 3)$; б) $A\ (4;\ 3)$, $B\ (4;\ -3)$.
1) Запишите формулу данной зависимости.
2) Проанализируйте расположение на координатной плоскости каждого из построенных графиков и их взаимное расположение.

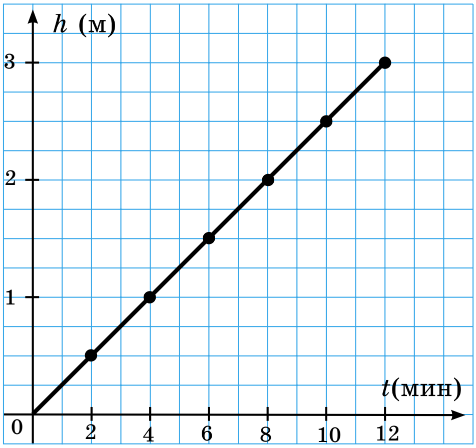


Рис. 9.32

1355. Маятник стенных часов дает 900 колебаний за 15 мин.
1) Вычислите коэффициент пропорциональности k.
2) Запишите формулу, выражающую прямую пропорциональность числа колебаний маятника (n) от промежутка времени (t).

1356. На рисунке 9.32 изображен график движения улитки по стволу дерева. Передвигаясь 12 мин, она достигла вершины дерева.
По графику ответьте на вопросы:
1) Какова высота дерева?
2) На какой высоте оказалась улитка через 8 мин?
3) Вычислите коэффициент пропорциональности.
Запишите формулу прямой пропорциональности высоты передвижения улитки (h) от времени движения (t).

1357. На рисунке 9.33 изображен график зависимости длины окружности (C) от ее диаметра (D).
Найдите по графику:
1) Значение C при $D = 2$ дм.
2) Значение D, которому соответствует $C = 12{,}56$ дм.
3) Установите вид зависимости и определите коэффициент пропорциональности.
Запишите формулу прямой пропорциональности длины окружности (C) от ее диаметра (D).

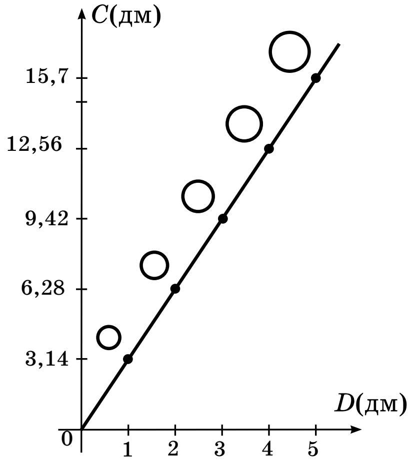


Рис. 9.33

1358*. Решите задачу рациональным способом.
Три мальчика разделили между собой собранные в саду яблоки. Первый

мальчик взял 25% всех яблок и еще 5 яблок, второй мальчик – 60% остатка и еще 2 яблока, а третий мальчик – остальные 20 яблок. Сколько всего яблок собрали мальчики в саду?

Ключевые факты.

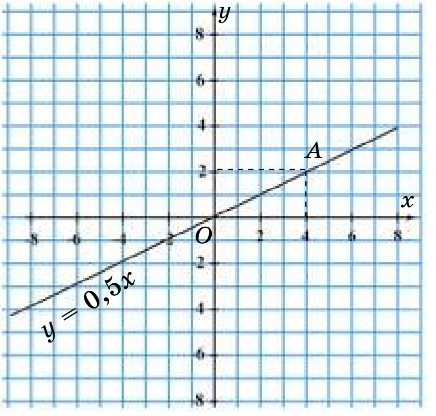
Прямая пропорциональность и ее график.

Две величины x и y называются прямо пропорциональными, если они связаны формулой $y = kx$, где k – любое, отличное от 0 число.

Число k называется коэффициентом пропорциональности.

График прямой пропорциональности $y = kx$ всегда проходит через начало координат – точку $O(0; 0)$.

На рисунке изображен график прямой пропорциональности, заданной формулой $y = 0{,}5x$, проходящий через точку $A(4; 2)$ и начало координат – $O(0; 0)$, где $k = \frac{y}{x}$; $k = \frac{2}{4} = 0{,}5$.



▲ **1347.** 1) –1; 1; 3) –4; 4. 4) –2; 2. **1350.** 1) 2 км/ч. **1353.** 2) $y = -1{,}5x$; $y = 3x$; $y = x$. **1355.** 2) $n = 60t$. **1358.** Всего 80 яблок.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ IX

А

1359. На рисунке 9.34 изображен график зависимости площади квадрата (S) от длины его стороны (a).
По графику:
1) Найдите площадь квадрата со стороной 2 см.
2) Найдите сторону квадрата, если его площадь равна 16 см^2.
Запишите данную зависимость в виде формулы.

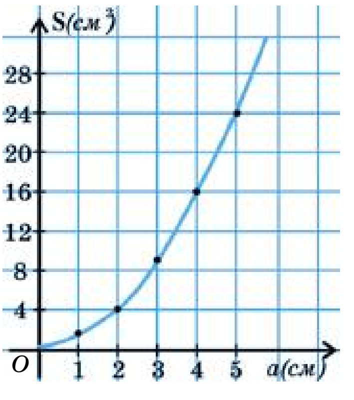


Рис. 9.34

1360. В таблице 14 дано изменение температуры воздуха в течение суток:

Таблица 14

Время (ч)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура (°C)	−2	−3	−4	−3	−2	3	6	7	7	5	3	1	−2

1) Какая температура была в 2 ч?, в 8 ч?, в 14 ч?, в 24 ч?
2) В котором часу температура воздуха была −4°C?, −3°C?, 5°C?, 1°C?
3) Определите самое холодное и самое теплое время суток.

B

1361. График прямой пропорциональности $y = kx$ проходит через точку A. Найдите значение k, если 1) $A(2; 3)$; 2) $A(3; 9)$; 3) $A(5; 8)$.

1362. Постройте график прямой пропорциональности $y = \frac{2}{3}x$. Найдите по графику:
1) Значение y, соответствующее значению x, равному 3; 6; −9.
2) При каком значении x значение y равно 2; 0; −4?

1363. Какие из точек: $A(5; 4)$; $B(2; 5)$; $C(-10; -8)$; $D(9; -3)$ принадлежат графику прямой пропорциональности $y = 0{,}8x$?

1364. Три насоса за 3 мин выкачивают 3 т воды. За сколько минут 5 насосов выкачивают 10 т воды?
A. За 4 мин; **B.** За 5 мин; **C.** За 6 мин; **D.** За 8 мин.

В уравнении $3x + 2y - 8 = 0$ имеются две переменные x и y. Для решения такого уравнения надо:
1) Члены уравнения, содержащие переменную y, оставить в левой части, а остальные члены с противоположными знаками перенести в правую часть уравнения: $2y = -3x + 8$;
2) разделить обе части уравнения на коэффициент при y и выразить y через x: $y = -1{,}5x + 4$;
3) придать x произвольное значение и вычислить соответствующее ему значение y.
Например, если $x = 1$, то $y = 2{,}5$;
если $x = 2$, то $y = 1$;
если $x = 3$, то $y = -0{,}5$ и т. д.
Решениями уравнения $3x + 2y - 8 = 0$ являются $x = 1$ и $y = 2{,}5$; $x = 2$ и $y = 1$; $x = 3$ и $y = -0{,}5$ и др. пары чисел. Найдите решения уравнения $2x + y - 3 = 0$.

Глава X. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

10.1. Линейное уравнение с двумя переменными

Например, сумма двух чисел в 3 раза больше их разности.

Пусть x – первое число, y – второе число. По условию задачи составим уравнение: $x + y = 3(x - y)$. Раскрыв скобки и упростив, получим уравнение $-2x + 4y = 0$.

Такое уравнение называют *линейным уравнением с двумя переменными,* или *уравнением с двумя неизвестными.*

Например, $3x + 2y + 6 = 0$; $7x - 4y - 8 = 0$; $-x + 2y - 4 = 0$ – это линейные уравнения с двумя переменными. Линейное уравнение с двумя переменными в общем виде записывается так: $ax + by + c = 0$.

Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by + c = 0$, где x и y – переменные, a, b и c – некоторые числа.

Числа a и b называют коэффициентами, а число c – свободным членом.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одно и то же множество решений, называются равносильными. Уравнения с двумя переменными, не имеющие решений, также считаются равносильными.

Уравнения с двумя переменными обладают такими же свойствами, как уравнение с одной переменной.

Свойства линейных уравнений с двумя переменными.

Свойство 1

Если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак на противоположный, то получится уравнение, равносильное данному.

Свойство 2

Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же, отличное от нуля, число, то получится уравнение, равносильное данному.

Например, рассмотрим решение уравнения $6x + 5y - 10 = 0$. Для этого надо переменную y выразить через x, используя свойства уравнений.

$5y = -6x + 10$;

$y = -1{,}2x + 2$,

где уравнение $y = -1{,}2x + 2$ равносильно уравнению $6x + 5y - 10 = 0$.

Чтобы найти решение уравнения $y = -1{,}2x + 2$, нужно подставить в него вместо x какое-нибудь его значение и вычислить соответствующее ему значение y.

Например, если:

$x = 1$, то $y = 0{,}8$;

$x = 2$, то $y = -0{,}4$;
$x = 3$, то $y = -1{,}6$.
Значит, пары значений переменных
$x = 1$, $y = 0{,}8$;
$x = 2$, $y = -0{,}4$;
$x = 3$, $y = -1{,}6$ являются решениями уравнения $6x + 5y - 10 = 0$.

Решением уравнения $ax + by + c = 0$ называется пара значений переменных, при подстановке которых в уравнение оно становится верным числовым равенством.

Пару значений переменных принято записывать в круглых скобках, причем на первом месте записывается значение x, а на втором – значение y. Пары чисел, являющиеся решениями уравнения $6x + 5y - 10 = 0$, записываются так: (1; 0,8), (2; –0,4), (3; –1,6) и т. д.

Задача. Ученики начальных классов должны из счетных палочек сделать треугольники и квадраты. Каждому ученику раздали по 30 счетных палочек. Сколько треугольников и сколько квадратов должен сделать каждый ученик?

Решение. Пусть y – количество треугольников, а x – количество квадратов.

По условию задачи составим уравнение $3y + 4x - 30 = 0$. Выразим y через x:

$$3y = 30 - 4x,$$

$$y = 10 - \frac{4}{3}x.$$

Если $x = 3$, то $y = 6$. Если $x = 6$, то $y = 2$.

У задачи других решений нет.

Ответ: Каждый ученик должен сделать или 3 квадрата и 6 треугольников, или 6 квадратов и 2 треугольника.

1. Дайте определение линейного уравнения с двумя переменными.
2. Сформулируйте свойства линейного уравнения с двумя переменными.
3. Что называется решением линейного уравнения с двумя переменными?

1365. Какое из следующих уравнений является линейным уравнением с двумя переменными (устно):

1) $0{,}5x + 2y - 8 = 0$; 3) $x - y - 4 = 0$; 5) $xy + 2x - 8 = 0$;

2) $xy = 12$; 4) $x^2 + y^2 = 13$; 6) $3x - 5y - 14 = 0$?

A

1366. 1) Какая из пар: $x = -1$ и $y = 3$; $x = -8$ и $y = 6$ является решением уравнения $x + y - 2 = 0$?

2) Какая из пар: $x = 0{,}5$ и $y = 3$; $x = -3$ и $y = 2$ является решением уравнения $2x + y - 4 = 0$?

1367. 1) Какие из пар: (3; 0), (4; −2), (5; −2), (−1; 8) являются решениями уравнения $2x + y - 6 = 0$?

2) Какие из пар: (2; 1), (−3; −11,5), (−1; 6), (3; 3,5) являются решениями уравнения $5x - 2y - 8 = 0$?

1368. Выразив переменную y через переменную x, найдите два каких-либо решения уравнения:

1) $x + y - 3 = 0$; 3) $-2x + y - 7 = 0$; 5) $4x - y - 3 = 0$;
2) $x + 4y + 12 = 0$; 4) $x - 3y - 6 = 0$; 6) $-x + 2y - 5 = 0$.

1369. Выразив переменную x через переменную y, найдите два каких-либо решения уравнения:

1) $x - 5y - 3 = 0$; 3) $4x - y - 8 = 0$; 5) $5x + y - 10 = 0$;
2) $2x + 7y - 10 = 0$; 4) $x + 3y + 2 = 0$; 6) $-x + 8y + 3 = 0$.

1370. Составьте линейное уравнение с двумя переменными, решением которого служит пара чисел:

1) $x = 1$ и $y = 4$; 3) $x = 5$ и $y = 2$;
2) $x = -2$ и $y = 3$; 4) $x = 3$ и $y = -1$.

1371. Составьте таблицу трех пар значений x и y (x, y – целые числа), являющихся решениями уравнений: 1) $y = 4 + 5x$; 2) $y = 3 + 2x$.

1372. У Сакена имеется 400 тг монетами достоинством в 50 тг и 100 тг. Сколько монет в 50 тг и сколько монет в 100 тг может быть у Сакена?
Сколько существует вариантов решения этой задачи?

1373. Мадина купила карандаши по 7 тг и ручки по 35 тг. За все она заплатила 210 тг. Сколько карандашей и сколько ручек могла купить Мадина?

1374. Первое число кратно 7, а второе число кратно 13. Сумма этих двух чисел равна 61. Найдите число, кратное 7.

1375. Решите уравнения:

1) $|x| = 6$; 3) $|4x| = 8$; 5) $|x + 1| = 4$;
2) $|-x| = 7$; 4) $|5x| = 3$; 6) $|x| + 3 = 7$.

B

1376. Выпишите уравнения, решениями которых являются: $x = 3$, $y = 2$:

1) $6x - 2{,}5y - 13 = 0$;
2) $0{,}3x - 4y - 10{,}8 = 0$;
3) $\frac{1}{3}x + 3{,}5y - 8 = 0$;
4) $0{,}6x - y + 0{,}2 = 0$.

1377. Составьте таблицу пяти пар значений x и y (x, y – целые числа), являющихся решениями уравнения $5x + 2y = 60$.

1378. Выразив переменную y через переменную x, найдите два каких-либо решения уравнения:

1) $\frac{3}{8}x + y - 3 = 0$;
2) $2{,}5x + y - 4 = 0$;
3) $\frac{5}{7}x + y - 1{,}5 = 0$;
4) $1{,}75x + y - 3 = 0$;
5) $1{,}4x + y - 2 = 0$;
6) $\frac{1}{3}x + y - 1 = 0$.

1379. 1) Найдите значение y, если уравнение $7x + 2y - 14 = 0$ имеет решения: $(1;\ y)$, $(2;\ y)$, $(0;\ y)$.

2) Найдите значение x, если уравнение $5x + 4y - 15 = 0$ имеет решения: $(x;\ 0)$, $(x;\ 5)$; $(x;\ -5)$.

1380. Клумба квадратной формы засажена цветами. 73 тюльпана посажены симметрично относительно диагоналей этого квадрата. Какое наименьшее количество тюльпанов было высажено на пересечении диагоналей квадрата?

1381. Во дворе у Дамира кролики и куры. Испугавшись забежавшей собаки, все они выскочили со двора. Дамир, загоняя их обратно, затратил на каждого кролика по 2 мин, на каждую курицу – по 3 мин. На это ушло всего 0,5 ч. Сколько кроликов и сколько куриц у Дамира? Сколько решений имеет задача?

1382. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 7 дает остаток 1, а при делении на 8 дает остаток 2.

1383. Выполните действия:

$$\frac{63{,}63 : 21 - 35{,}35 : 7 - \left(1\frac{1}{6} - 2\right) \cdot 6 + 1{,}02}{6 : \frac{3}{5} \cdot 3{,}8 + 3{,}2 : 1\frac{3}{5}}.$$

C

1384. Найдите значение коэффициента a при переменной x, если пара значений x и y является решением:

1) $x = -3$ и $y = 4$ – уравнения $ax + 3y - 6 = 0$;

2) $x = 0{,}5$ и $y = 2$ – уравнения $ax + \frac{1}{8}y - 1 = 0$;

3) $x = 2$ и $y = 4{,}5$ – уравнения $-ax - 2y - 11 = 0$.

1385. Найдите значение коэффициента b при переменной y в уравнении, если пара значений x и y является решением:

1) $x = 2$ и $y = 1{,}5$ – уравнения $\frac{5}{8}x - by + 4{,}75 = 0$;

2) $x = 0{,}3$ и $y = 2$ – уравнения $6x + by - 2{,}3 = 0$;

3) $x = 1\frac{2}{3}$ и $y = -2$ – уравнения $3x - by - 7 = 0$.

1386. Расстояние между городами 54 км. Сначала велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч, затем – со скоростью 10 км/ч. Сколько часов велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч? 10 км/ч?

1387. В магазин привезли 106 л масла в пятилитровых и семилитровых банках. Сколько пятилитровых и семилитровых банок с маслом привезли в магазин? Заполните таблицу:

Количество 5-литровых банок			
Количество 7-литровых банок			

1388*. Для детского сада купили игрушки на сумму 3700 тг. Купили всего 12 игрушек: медвежат, кукол и мячей. Цена медвежонка 500 тг, куклы – 300 тг, а мяча – 200 тг. Сколько медвежат, кукол и мячей купили для детского сада? Заполните таблицу.

Количество медвежат	6			1
Количество кукол		7		
Количество мячей			5	

1389. Выполните действия:

1) $2+\dfrac{3}{2-1\frac{1}{2}}$; 2) $\dfrac{3+\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}{3}}{7-\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{\frac{7}{8}}}$; 3) $5-\dfrac{1}{4-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{2-\frac{1}{2}}}}$.

Ключевые факты.

Линейные уравнения с двумя переменными.

Уравнения вида $ax + by + c = 0$ (где x и y – переменные; a, b, c – некоторые числа) **называются линейными *уравнениями с двумя переменными*.**

Например, $2x - y - 3 = 0$ – линейное уравнение с двумя переменными x и y:

$$y = 2x - 3.$$

Если $x = 4$, то $y = 5$; если $x = 6$, то $y = 9$ и т. д.

Пара значений переменных, обращающая уравнение с двумя переменными в верное числовое равенство, называется *решением уравнения с двумя переменными*.

Пары чисел (4; 5); (6; 9); (8; 13); (10; 17); ... являются решением уравнения $2x - y - 3 = 0$.

1372. (2; 3); (4; 2); (6; 1). **1373.** (25; 1); (20; 2); (15; 3); (10; 4); (5; 5). **1379.** 1) 3,5; 0; 7; 2) 3; –1; 7. **1381.** 4 решения. **1383.** 0,1. **1384.** 1) 2; 2) 1,5; 3) –10. **1385.** 1) 4; 2) 0,25; 3) 1. **1386.** 2 ч; 3 ч. **1389.** 1) 8; 2) 0,5; 3) 4,72.

На рисунке 10.1 построен график уравнения $-1{,}5x - y + 3 = 0$. Данную формулу запишите в виде $ax + by + c = 0$. Найдите значения a, b и c. Что представляет собой график уравнения $ax + by + c = 0$?

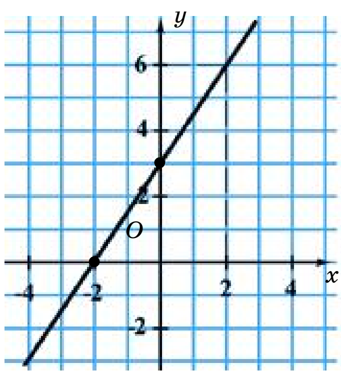


Рис. 10.1

10.2. График линейного уравнения с двумя переменными

Известно, что решением линейного уравнения с двумя переменными является пара чисел, состоящая из значения x и соответствующего ему значения y. Каждой паре чисел $(x; y)$ на координатной плоскости соответствует только одна точка. Множество таких точек образуют *график линейного уравнения с двумя переменными.*

Множество точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями линейного уравнения, называются графиком линейного уравнения с двумя переменными.

Рассмотрим график линейного уравнения с двумя переменными.

I случай.

В уравнении $ax + by + c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Пример 1. Построим график линейного уравнения с двумя переменными $x - 2y - 4 = 0$.

Решение. Подберем несколько решений заданного уравнения:

1) $(0; -2)$. Если $x = 0$, $y = -2$, то $0 - 2 \cdot (-2) - 4 = 0$ – верное равенство;

2) $(1; -1{,}5)$. Если $x = 1$, $y = -1{,}5$, то $1 - 2 \cdot (-1{,}5) - 4 = 0$ – верное равенство;

3) $(2; -1)$. Если $x = 2$, $y = -1$, то $2 - 2 \cdot (-1) - 4 = 0$ – верное равенство;

4) $(4; 0)$. Если $x = 4$, $y = 0$, то $4 - 2 \cdot 0 - 4 = 0$ – верное равенство;

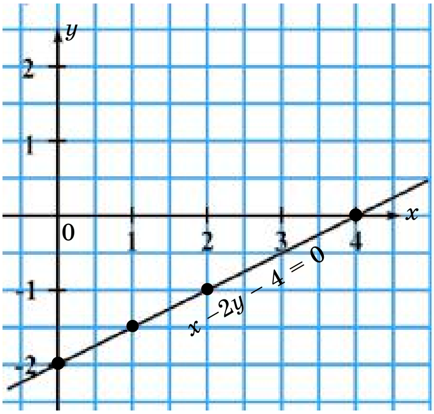


Рис. 10.2

Построим точки: $(0; -2)$, $(1; -1{,}5)$, $(2; -1)$, $(4; 0)$ на координатной плоскости $x0y$. Они лежат на одной прямой. Проведем эту прямую (рис. 10.2). *Данная прямая является графиком линейного уравнения с двумя переменными $x - 2y - 4 = 0$.*

Мы знаем о том, что через любые две точки проходит единственная прямая.

Чтобы построить график линейного уравнения с двумя переменными, достаточно найти координаты двух точек графика, затем отметить эти точки в координатной плоскости и провести через них прямую.

Линейное уравнение с двумя переменными имеет столько же решений, сколько точек расположено на прямой, служащей графиком уравнения $ax + by + c = 0$, то есть бесконечно много.

II случай.

В уравнении $ax + by + c = 0$, если $a \neq 0$ и $b = 0$, то оно имеет вид $ax + 0 \cdot y + c = 0$, или $ax + c = 0$; $ax = -c$; $x = -\dfrac{c}{a}$.

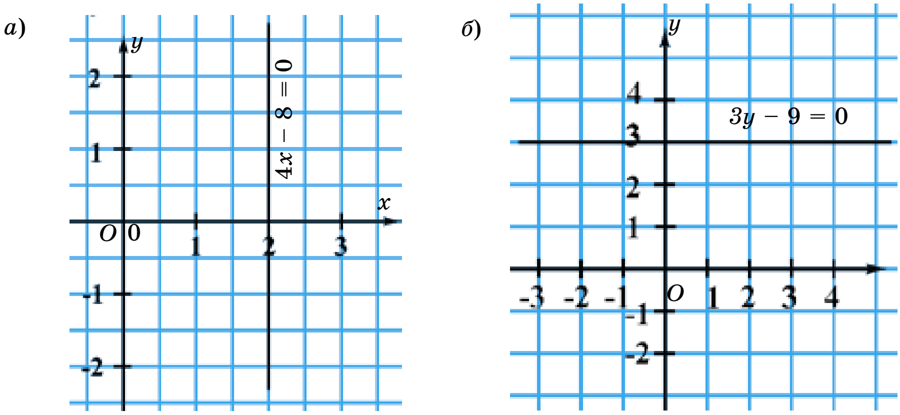


Рис. 10.3

Пример 2. $4x - 8 = 0$, или $4x + 0 \cdot y - 8 = 0$; $4x = 8$; $x = 2$.

Его решениями являются все пары чисел $(x; y)$, в которых $x = 2$, а y – любое число. Например, $(2; -1)$, $(2; 0)$, $(2; 1)$ и другие пары чисел. В этом случае график уравнения – прямая (рис. 10.3, *а*), пересекающая ось абсцисс в точке $(2; 0)$. Она параллельна оси ординат.

III случай.

Если в уравнении $ax + by + c = 0$ $a = 0$; $b \neq 0$, то оно имеет вид: $0 \cdot x + by + c = 0$, или $by + c = 0$. $by = -c$; $y = -\dfrac{c}{b}$

Пример 3. $3y - 9 = 0$, или $0 \cdot x + 3y - 9 = 0$. $3y = 9$; $y = 3$.

Его решениями являются все пары чисел $(x; y)$, в которых $y = 3$, а x – любое число.

Например, $(-2; 3)$, $(0; 3)$, $(4; 3)$ и другие пары чисел. В этом случае график уравнения – прямая (рис. 10.3, *б*), пересекающая ось ординат в точке $(0; 3)$. Она параллельна оси абсцисс.

Если хотя бы один из коэффицентов a или b линейного уравнения $ax + by + c = 0$ отличен от нуля, то графиком уравнения является *прямая*.

IV случай. Если $a = 0$, $b = 0$, но $c \neq 0$, то уравнение не имеет решений.

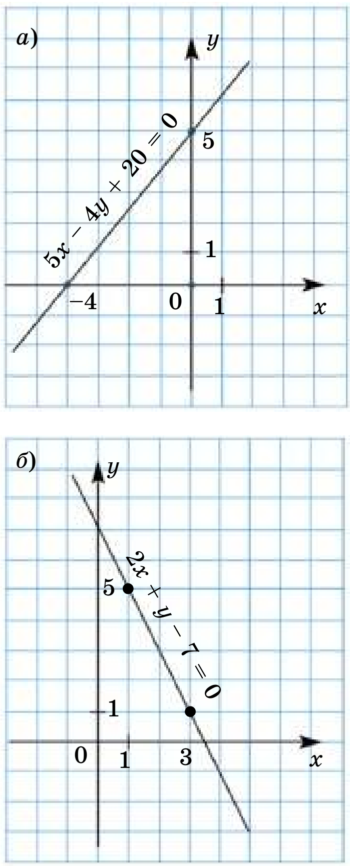


Рис. 10.4

V случай. Если $a=0$, $b=0$, $c\neq0$, то графикам является вся координатная плоскость.

Рассмотрим способы построения графиков линейного уравнения с двумя переменными для случаев $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

1-й способ. Нахождение точек пересечения прямой с осями координат и построение графика уравнения.

Пример 4. Построить график уравнения $5x - 4y + 20 = 0$.

Решение. 1. Если $x = 0$, то $5 \cdot 0 - 4y + 20 = 0$,

$$-4y = -20,$$
$$y = 5.$$

2. Если $y = 0$, то $5x - 4 \cdot 0 + 20 = 0$,

$$5x = -20,$$
$$x = -4.$$

3. Построим на координатной плоскости $0xy$ точки: $(0; 5)$ и $(-4; 0)$.

4. Проведем через точки $(0; 5)$ и $(-4; 0)$ прямую (рис. 10.4, *а*). Это и есть искомый график.

2-й способ. Надо выразить переменную y через x и дать значения переменной.

Пример 5. Построить график уравнения $2x + y - 7 = 0$.

1. y выразим через x. $y = -2x + 7$.

Если $x = 3$, то $y = 1$;

Если $x = 1$, то $y = 5$.

2. Построим на координатной плоскости $0xy$ точки $(3; 1)$ и $(1; 5)$.

3. Проведем через точки $(3; 1)$ и $(1; 5)$ прямую (рис. 10.4, *б*). Построенная прямая является графиком уравнения $2x + y - 7 = 0$.

1. Что является графиком линейного уравнения с двумя переменными, у которого хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля?
2. Как построить график линейного уравнения с двумя переменными?
3. Что является графиком уравнения $ax + by + c = 0$, если $b = 0$.

1390. Графиком какого из этих уравнений является прямая:

1) $5x + 4y - 20 = 0$; 3) $y = \dfrac{7}{x}$; 5) $x^2 - y = 3$;

2) $xy = 12$; 4) $7x + 3y - 21 = 0$; 6) $3x - 2y = 0$?

А

1391. Постройте графики уравнений:

1) $x + y - 3 = 0$; 3) $x + 4y - 3 = 0$; 5) $x + 9 = 0$;

2) $2x - y - 4 = 0$; 4) $3x + y - 2 = 0$; 6) $4y + 8 = 0$.

1392. Какие из точек: 1) $A(3; 0)$; 2) $B(2; 5)$; 3) $C(-3; 10)$; 4) $D(-6; 15)$ принадлежат графику уравнения $5x + 3y = 15$?

1393. 1) На прямой, являющейся графиком уравнения $2x + y - 5 = 0$, найдите ординату точки, абсцисса которой равна 2.
2) На прямой, являющейся графиком уравнения $x + 3y + 7 = 0$, найдите абсциссу точки, ордината которой равна 1.

1394. Запишите уравнения прямых AB и CD, изображенных на рисунке 10.5, в виде $ax + by = c$.

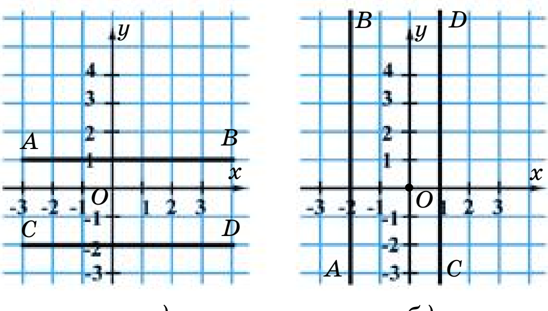


Рис. 10.5

1395. При каком значении c график уравнения проходит через начало координат:
1) $x - y = c$; 2) $3x + 1{,}5y = 2 + c$; 3) $4x - 3y = c - 3$?

1396. Решите задачу, составив уравнение.
Который сейчас час, если оставшаяся часть суток равна $1\frac{2}{3}$ прошедшей?

B

1397. Начертите график уравнения $-2x + 3y - 12 = 0$ и найдите:
1) абсциссу точки, ордината которой равна 2;
2) ординату точки, абсцисса которой равна 3.

1398. Постройте график уравнения, запишите координаты точки пересечения графика с осью ординат:
1) $3x + y - 6 = 0$;
2) $-3x + 2y - 4 = 0$;
3) $2{,}5x + y - 5 = 0$;
4) $4x + 3y - 12 = 0$;
5) $-3x + 5y - 15 = 0$;
6) $x + 2y + 4 = 0$.

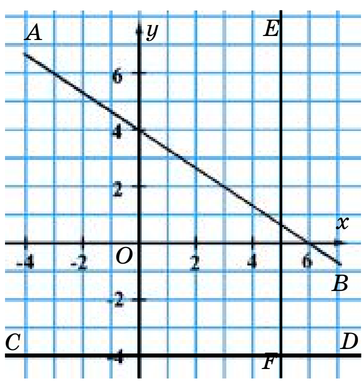


Рис. 10.6

1399. Запишите уравнения прямых AB, CD и EF, изображенных на рисунке 10.6.

1400. Запишите уравнение прямой, если известны коэффициенты a, b и свободный член c. Постройте ее график:

1) $a = 1$; $b = 2$; $c = 4$;
2) $a = 0$; $b = -1$; $c = 6$;
3) $a = 3$; $b = 0$; $c = -9$;
4) $a = 4$; $b = 1$; $c = -2$.

1401. Одинаковые с виду кольца находятся в 4 коробках. В трех коробках имеются кольца массой 30 г каждое, а в одной коробке – кольца массой 29 г каждое. Неизвестно, какой массы кольца находятся в каждой коробке. Как можно определить одним взвешиванием на весах со стрелкой, в какой коробке кольца по 29 г каждое?

1402. Стоимость книги и альбома равна стоимости 4-х фломастеров. Цена альбома равна стоимости 3-х линеек. Стоимость 2-х линеек и альбома равна цене книги. Стоимость скольких линеек равна цене фломастера?

C

1403. Приведите уравнение с двумя переменными к виду $ax + by + c = 0$ и постройте его график:

1) $-9x + 2y - 20 = -13x + 7y$; 2) $2(x + 2y) - 3 = 3(x + y) + 1$; 3) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

1404. На одной координатной плоскости Oxy постройте графики уравнений $2x + y = 6$ и $-x + y = 3$. Найдите координаты точки пересечения их графиков.

1405. На рисунке 10.7 изображены прямые a, b, c и d:

1) Составьте их уравнения.

2) Найдите периметр фигуры (в единичных отрезках), образованной при пересечении прямых.

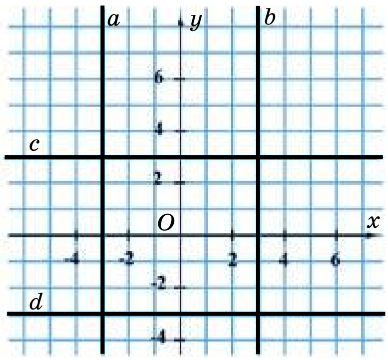


Рис. 10.7

1406. Выполните действия:

$$\frac{\left(2\frac{5}{18}-1,25\right):4\frac{1}{9}}{\left(\frac{7}{15}-\frac{5}{12}\right)\cdot 5}+\frac{\left(3\frac{5}{9}-2,2-\frac{2}{15}\right)\cdot\left(-\frac{3}{11}\right)}{\left(1\frac{7}{9}-2\right)\cdot 2,25}.$$

Ключевые факты.

График линейного уравнения с двумя переменными.

Графиком линейного уравнения $ax + by + c = 0$, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменной отличен от нуля, является прямая.

Например, построим график уравнения $3x + 2y - 6 = 0$.

Графиком уравнения $3x + 2y - 6 = 0$ является прямая. Для построения прямой достаточно знать координаты двух ее точек. Если $x = 0$, то получим $2y - 6 = 0$, $y - 3 = 0$, откуда $y = 3$. Если $y = 1,5$, то $3x + 2 \cdot 1,5 - 6 = 0$; $3x = 3$, $x = 1$.

Мы нашли две точки графика: $A(0; 3)$ и $B(1; 1,5)$.

Проведя через них прямую, получим график уравнения $3x + 2y - 6 = 0$ (рис. 1).

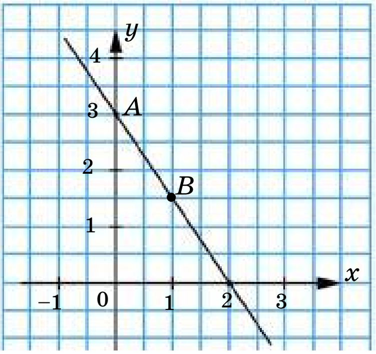


Рис. 1

1396. 9 часов. **1397.** 1) $x = -3$; 2) $y = 6$. **1398.** 1) (0; 6); 2) (0; 2); 3) (0; 5). **1402.** 2-х линеек. **1404.** $x = 1$; $y = 4$. **1405.** 2) P = 24 единичным отрезкам. **1406.** $1\frac{2}{3}$.

10.3. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными

Задача. Длина прямоугольника больше его ширины на 4 см, а его периметр равен 36 см. Найдите длину и ширину прямоугольника.

Решение. Пусть x см – длина прямоугольника, y см – ширина прямоугольника.

По условию задачи составим два линейных уравнения с двумя переменными: $x - y = 4$ и $2(x + y) = 36$. Значение x в первом уравнении равно значению x во втором уравнении. Аналогично, значение y в первом уравнении равно значению y во втором. Поэтому, чтобы найти значения x и y, целесообразно объединить эти уравнения в одну систему, так как они имеют общее решение. Тогда из данных двух линейных уравнений можно составить *систему линейных уравнений* с двумя переменными. Уравнения системы записывают друг под другом и объединяют их фигурной скобкой:

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ 2(x + y) = 36. \end{cases}$$

Пара значений переменных x и y в данной системе уравнений будет решением системы уравнений, так как если $x = 11$ и $y = 7$ подставить в каждое уравнение, то получатся верные равенства:

$$\begin{cases} 11 - 7 = 4, \\ 2(11 + 7) = 36. \end{cases}$$

Значит, пара чисел (11; 7) является решением заданной системы уравнений.

Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.

В общем виде система линейных уравнений с двумя переменными записываются так:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 – заданные числа.

Решить систему уравнений – значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Две системы уравнеий называются *равносильными*, если они имеют одни и те же решения, Если, в частности, обе системы не имеют решений, то они также считаются равносильными.

1. Сформулируйте определение решения системы линейных уравнений с двумя переменными.
2. Что значит решить систему линейных уравнений?

1407. (Устно). Проверьте, что числа $x = 3$; $y = -1$ являются решением системы:

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0; \\ x + y - 2 = 0. \end{cases}$$

A

1408. Является ли пара чисел $x = 5$; $y = 2$ решением системы:

1) $\begin{cases} x - 3y + 1 = 0, \\ 2x + y - 8 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + y - 17 = 0, \\ x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$

1409. Какие из пар $(-2; 4)$; $(-1; -3)$; $(3; 4)$ является решениями системы:

1) $\begin{cases} 5x - y + 14 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - y - 8 = 0, \\ x - y + 1 = 0? \end{cases}$

1410. Дана система уравнений $\begin{cases} x + y - 7 = 0, \\ -x + 2y + 4 = 0. \end{cases}$ Из следующих пар чисел найдите ту, которая удовлетворяет данной системе:

1) $(3; 2)$; 2) $(6; 1)$.

1411. Найдется ли среди пар чисел $(-2; 3)$, $(4; 1)$ и $(1; 3)$ решение системы:

1) $\begin{cases} -x + y - 5 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x - y - 3 = 0, \\ 3x + y - 6 = 0. \end{cases}$

1412. Квадрат со стороной 30 см разделен на квадраты с периметром 24 см. Каждый из получившихся квадратов разделили на два равных между собой прямоугольных треугольника.
1) Сколько треугольников получилось?
2) Чему равна площадь каждого треугольника?

1413. Решите уравнения:

1) $5|x| - 4 = |x|$; 3) $|-x| + 6 = 2|-x|$; 5) $7|x| - 4 = |x|$;
2) $|x| - 5 = 3|x|$; 4) $8|x| - |x| = 14$; 6) $6|x| + |x| - 3 = 5|x|$.

B

1414. Какие из пар чисел $(1; 2)$; $(-3; -1)$; $(2; 4)$ являются решениями системы:

1) $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ 3x - 2y + 2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ 5x - 2y + 1 = 0? \end{cases}$

1415. Является ли пара чисел (4; −2) решением системы:

1) $\begin{cases} 0,5x - 3y - 8 = 0, \\ x + 4y + 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -x + 2y + 8 = 0, \\ x + y = 2\,? \end{cases}$

1416. Составьте систему двух линейных уравнений с двумя переменными, решением которой служит пара чисел:

1) (3; −3); 2) (2; 7); 3) (5; −1).

1417. Дана система уравнений $\begin{cases} x + \dfrac{1}{3}y - c_1 = 0, \\ -x + y + c_2 = 0. \end{cases}$ Известно, что пара чисел $x = 2$; $y = -3$ является ее решением. Найдите c_1 и c_2.

1418. Как набрать 2 л воды из реки, ползуясь сосудами емкостью 9 л и 5 л?

C

1419. Выберите соответствующее решение системы:

A. (8; 6); **B.** (4; 3); **C.** (5; −2); **D.** (6; 2).

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}y = 1, \\ \dfrac{1}{4}x + \dfrac{2}{3}y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{4}y = 1,5, \\ \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}y = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}y = 3, \\ \dfrac{5}{8}x - \dfrac{2}{3}y = 1. \end{cases}$

1420. Составьте систему линейных уравнений с двумя переменными, у которой решениями будет:

1) $x = 4$; $y = -3$; 2) $x = -2$; $y = -1$; 3) $x = 6$; $y = 1$.

1421. Дана система уравнений $\begin{cases} 3x - 4y + c_1 = 0, \\ \dfrac{1}{3}x + 6y - c_2 = 0. \end{cases}$ Известно, что пара чисел $x = 3$; $y = 0,5$ является ее решением. Найдите c_1 и c_2.

1422. Дана система уравнений $\begin{cases} ax + 4y + 1 = 0, \\ 2x + by - 9 = 0. \end{cases}$ Известно, что пара чисел (−3; 5) являются ее решением. Найдите значения a и b.

1423. Вычислите:

$$\frac{\left(3{,}9-2{,}55+4\frac{5}{12}-1\frac{1}{15}\right):4{,}7}{\left(0{,}81\cdot 8\frac{1}{3}-0{,}57:4\frac{3}{4}\right):2{,}21+4{,}125:2\frac{1}{16}}.$$

1412. 2) 18 см^2. **1417.** $c_1 = 1$; $c_2 = 5$. **1421.** $c_1 = -7$; $c_2 = 4$. **1422.** $a = 7$; $b = 3$. **1423.** 0,2.

Пример.

Дана система уравнений: $\begin{cases} x-y=29, \\ 2x+7y=112. \end{cases}$

Решим систему уравнений. Для этого:

1) выразим x из первого уравнения через y: $x = 29 + y$;

2) полученное значение x подставим во второе уравнение: $2(29 + y) + 7y = 112$; $58 + 9y = 112$; $9y = 54$; $y = 6$;

3) значение y подставим в первое уравнение: $x = 29 + y$, $x = 29 + 6$, $x = 35$.

Ответ: $x = 35$; $y = 6$.

Этим же способом решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=7, \\ 5x+3y=25. \end{cases}$

10.4. Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки

Рассмотрим решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки.

Пример 1. Ученик задумал два числа. Первое число на 7 больше второго. Если от утроенного первого числа вычесть удвоенное второе число, то получится 27. Какие числа задумал ученик?

Решение. Пусть x – первое число, y – второе число.

По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x-y=7, \\ 3x-2y=27. \end{cases} \qquad (1)$$

В первом уравнении выразим x через y: $x = y + 7$.

Подставив во второе уравнение вместо переменной x выражение $y + 7$, получим систему:

$$\begin{cases} x=y+7, \\ 3(y+7)-2y=27. \end{cases} \qquad (2)$$

Системы (1) и (2) равносильны, то есть имеют одно и то же множество решений.

13–3451

Второе уравнение системы (2) представляет собой уравнение с одной переменной. Решим его:

$3y + 21 - 2y = 27,$

$y = 6.$

Подставив в первое уравнение системы вместо переменной y ее значение, равное 6, получим:

$x = 6 + 7,$

$x = 13.$

Пара чисел (13; 6) является решением системы.

Ответ: (13; 6).

Пример 2. Решим систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{5} - \dfrac{y+2}{3} = 1, \\ \dfrac{x+1}{7} + \dfrac{2y-5}{3} = 2. \end{cases}$

Левую и правую части первого уравнения умножим на 15, а левую и правую части второго – на 21, так как НОК (5; 3) = 15; НОК (7; 3) = 21.

Тогда

$$\begin{cases} 3(2x+3) - 5(y+2) = 15, \\ 3(x+1) + 7(2y-5) = 42; \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 9 - 5y - 10 = 15, \\ 3x + 3 + 14y - 35 = 42; \end{cases} \quad \begin{cases} 6x - 5y = 16, \\ 3x + 14y = 74. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения y через x. Подставив во второе уравнение вместо y выражение $\dfrac{6x-16}{5}$, получим систему:

$$\begin{cases} y = \dfrac{6x-16}{5}, \\ 3x + 14 \cdot \dfrac{6x-16}{5} = 74; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{6x-16}{5}, \\ 15x + 84x - 224 = 370. \end{cases}$$

Решим уравнение $15x + 84x - 224 = 370$:

$$99x = 594,$$
$$x = 6.$$

Подставим в уравнение $y = \dfrac{6x-16}{5}$ вместо x число 6 и найдем соответствующее ему значение y: $y = \dfrac{6 \cdot 6 - 16}{5} = 4$; $y=4$.

Ответ: (6; 4).

Для решения системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки надо:

1) *выразить одну переменную через другую в одном из уравнений (x через y или y через x);*

2) *подставить полученное значение переменной в другое уравнение системы, тогда получится линейное уравнение с одной переменной;*

3) *решить полученное линейное уравнение с одной переменной и найти значение этой переменной;*

4) *подставить найденное значение переменной в любое уравнение упрощенной системы и найти значение этой переменной.*

Если в одном из уравнений системы коэффициент при одной из переменных равен 1, то в этом случае для решения данной системы уравнений целесообразно использовать способ подстановки.

1. Как решить систему линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки?
2. В каком случае целесообразно использовать способ подстановки при решении системы линейных уравнений с двумя переменными?

1424. 1) Будет ли пара чисел (5; −3) решением системы уравнений

$$\begin{cases} x - y = 8, \\ 2x + y = 7\,? \end{cases}$$

2) Будет ли пара чисел $x = 2$, $y = 1$ решением системы уравнений

$$\begin{cases} 4{,}5x - y = 8, \\ x + 3{,}2y = 5{,}2\,? \end{cases}$$

A

Решите системы уравнений способом подстановки **(1425–1427)**.

1425. 1) $\begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ 2x - 3y + 1 = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + y - 4 = 0, \\ 5x + y - 10 = 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + 5y + 2 = 0, \\ 0{,}5x - y - 6 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -x + y - 4 = 0, \\ 4x + y + 1 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 8x - 3y - 7 = 0, \\ 3x + y - 9 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 12x - y - 18 = 0, \\ x + 0{,}5y - 5 = 0. \end{cases}$

1426. 1) $\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0, \\ x - y - 3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y - 7 = 0, \\ 5x - 3y - 1 = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 6x + 5y - 6 = 0, \\ 2x + y + 2 = 0. \end{cases}$

1427. 1) $\begin{cases} 2(x+y)-x+6=0, \\ 3x-(x-y)=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x-2(y+4)=0, \\ 6(2x+3)-y-41=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3(x+2y)-y-27=0, \\ 4(x+y)-3x-23=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x+3(x+y)-11=0, \\ 7(x+3y)-6x+59=0. \end{cases}$

Составьте систему уравнений и решите ее способом подстановки **(1428–1436).**

1428. Сумма двух чисел равна 58. Первое число на 8 больше второго. Найдите эти числа.

Первое число	x	на 8 больше	} 58
Второе число	y		

1429. Заработная плата двух мастеров за один день равна 16 000 тт. Заработная плата первого мастера за 5 дней на 17 000 тг больше, чем заработная плата второго за 4 дня. Сколько тенге каждый мастер получает в день?

1430. Стоимость 1 кг яблок и 1 кг груш 275 тг. Стоимость 3 кг яблок на 50 тг меньше, чем стоимость 4 кг груш. Какова цена 1 кг яблок?, 1 кг груш?

1431. Периметр прямоугольника равен 40 см. Если его длину уменьшить на 20%, а ширину увеличить на 20%, то периметр будет равен 36 см. Найдите первоначальную длину и ширину прямоугольника.

1432. Ученик задумал два числа. Разность первого и второго чисел равна 8. Утроенное первое число на 4 меньше, чем второе, увеличенное в 5 раз. Какие числа задумал ученик?

1433. На окружности длиной 120 см находятся паук и муравей. Если они будут двигаться по ней навстречу друг другу, то встретятся через 12 с, а если друг за другом, – то через 30 с. Найдите скорость паука и скорость муравья.

1434. Если каждую цифру двузначного числа записать как однозначное число, то их сумма равна 9. Если эти цифры поменять местами, то получится число, которое на 63 меньше первоначального. Найдите первоначальное число.

1435. На пошив одной рубашки и одного платья израсходовали 4 м ткани. Из куска ткани длиной 30 м сшили 5 рубашек и 9 платьев.

Сколько метров ткани израсходовали на пошив одной рубашки?; одного платья?

A. 1,8 м; 2,2 м; **B.** 1,9 м; 2,1 м; **C.** 1,5 м; 2,5 м; **D.** 1 м; 3 м.

1436. Масса коробки конфет и 2 пакетов сушеного урюка равна 550 г. Масса 5 коробок конфет и 3 пакетов урюка равна 1 кг 700 г. Какова масса коробки конфет?; пакета урюка?

1437. Упростите выражения:
1) $5mn - 7mn + 3m - m$;
2) $mn - 3mnk + 4mn$;
3) $2ab - ab + 5ab$;
4) $7ab - 5bc - 2ab$.

B

Решите системы уравнений способом подстановки **(1438–1440)**.

1438. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} - 1 = 0, \\ \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{4} + 1 = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{2} - 5 = 0, \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} - 4 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} + 3 = 0, \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{5} - 5 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{3} + 0,6 = 0, \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{6} - 1 = 0. \end{cases}$

1439. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{10} - \dfrac{y}{5} = 0, \\ \dfrac{5x}{3} + \dfrac{y}{6} - 7 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{8} - 2 = 0, \\ \dfrac{2x}{9} + \dfrac{y}{6} - 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{6x}{7} + \dfrac{5y}{21} - 5 = 0, \\ \dfrac{9x}{4} - \dfrac{y}{12} - 11 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{7x}{3} - \dfrac{y}{9} - 4 = 0, \\ \dfrac{8x}{5} - \dfrac{y}{30} - 3 = 0. \end{cases}$

1440. 1) $\begin{cases} 2(x - 2y) = x - 8y, \\ 5(x + y) = 2(x - y) + 10; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 15 + 2(x + 3y) = 3(4x + y), \\ 2(5x - y) - 3y = 2 + 3(2x - y); \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3(x + 4y) - 4x = 2(2x + y), \\ 7(x - 5y) + 6x = 3(x + 4y) + 27; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5(7x + 2y) - 11y = 6(2x + y) + 2, \\ 33 + 3(6x - 5y) = 3(x + 2y) - 5y. \end{cases}$

Составьте систему уравнений и решите ее способом подстановки **(1441–1448).**

1441. Сын моложе отца на 24 года. Через 5 лет отец будет старше сына в 4 раза. Сколько лет отцу? Сколько лет сыну?

1442. Длина прямоугольника на 3 см больше ширины. Его периметр 22 см. Найдите длину и ширину прямоугольника.

1443. Два тракториста за 7 дней вспахали 147 га поля. Площадь поля, вспаханного первым трактористом за 3 дня, равна площади поля, вспаханного вторым трактористом за 4 дня.
Сколько гектаров поля вспахал каждый тракторист за один день?

1444. В 5 клетках 16 зайцев. Докажите, что найдется клетка, в которой находятся не менее 25% всех зайцев.

1445. Учитель приготовил тетрадные листы для проведения контрольной работы. Если учитель даст каждому ученику по 2 листа, то 12 листов будут лишними, а если даст каждому по 3 листа, то 16 листов не хватит. Сколько учеников в классе? Сколько листов подготовил учитель?

1446. *(Задача-шутка.)* Когда Незнайка первый раз подсчитал в классе носы девочек и уши мальчиков, то их оказалось 41. Когда он во второй раз подсчитал уши девочек и носы мальчиков, то их оказалось 43. Сколько в классе мальчиков? Сколько девочек?

1447. Расстояние между двумя пунктами равно 54 км. Из этих пунктов одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Через 2 ч они встретились. До встречи расстояние, преодоленное первым велосипедистом, оказалось в 1,25 раза больше, чем расстояние, преодоленное вторым велосипедистом. Найдите скорость первого велосипедиста, скорость второго велосипедиста.

1448. Площадь, занятая плодовыми деревьями, на 6 га больше, чем площадь, занятая овощами. После того как площадь, занятую плодовыми деревьями, увеличили на 25%, а площадь, занятую овощами – на 20%, сумма этих площадей стала равной 32 га. Найдите первоначальную площадь, занятую плодовыми деревьями, и первоначальную площадь, занятую овощами.

A. 16 га; 10 га; **B.** 15 га; 9га; **C.** 17 га; 11 га; **D.** 20 га; 14 га.

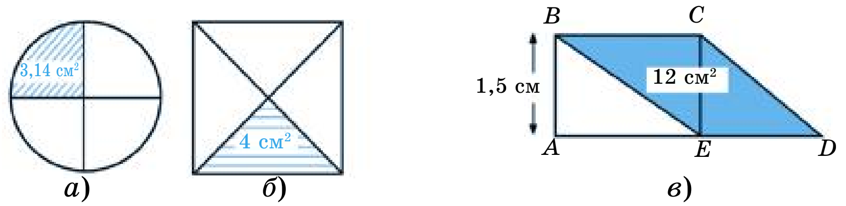


Рис. 10.16

1449. По данной площади закрашенной части каждой фигуры на рисунке 10.16 найдите:
а) радиус круга;
б) сторону квадрата.
в) $AE = ED$, $ABCE$ – прямоугольник. Найдите длину BC.

C

Решите системы уравнений способом подстановки **(1450, 1451).**

1450. 1) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{x-2y}{5} = \dfrac{4(2x+y)}{15}, \\ \dfrac{x-4y}{3} + \dfrac{5x-11y}{6} = \dfrac{3x-1}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{7x+y}{3} - \dfrac{5x-y}{2} = \dfrac{x+y}{6}, \\ \dfrac{9x-2y}{8} + \dfrac{7x+4y}{6} = \dfrac{x+y}{3} + 4. \end{cases}$

1451. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{xy}, \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{xy}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{5}{mn}, \\ \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{mn}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{13}{xy}, \\ \dfrac{8}{x} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{16}{xy}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{5}{m} - \dfrac{3}{n} = \dfrac{7}{mn}, \\ \dfrac{1}{m} + \dfrac{2}{n} = \dfrac{17}{mn}. \end{cases}$

Составьте систему уравнений и решите ее способом подстановки **(1452–1458).**

1452. В первый год в крестьянском хозяйстве с двух полей собрали 560 т зерна. Во второй год с первого поля собрали на 15% зерна больше, а со второго поля – на 10% зерна больше, чем в первый год. С двух полей собрали всего 632 т зерна. Сколько тонн зерна собрали с каждого поля в первый год?

1453. Сумма скоростей катера по течению и против течения равна 44 км/ч. Катер проплывает по течению за 5 ч такое же расстояние, какое он проплывает против течения за 6 ч. Найдите скорость катера по течению и против течения.

1454. По плану мастер и его ученик должны были изготовить 140 деталей. Мастер изготовил на 30% деталей больше, а ученик – на

10% деталей меньше намеченного плана. Всего они изготовили 158 деталей. Сколько деталей должен был изготовить по плану мастер?; ученик?

1455. Из одного пункта в противоположных направлениях выехали два поезда. Если они будут ехать 3,2 ч, то расстояние между ними будет 480 км. Если первый поезд выедет на 1,4 ч раньше второго, то после этого между ними через 2 ч расстояние будет 412 км. Найдите скорость каждого поезда.

1456. Собственная скорость весельной лодки в 3 раза больше скорости течения. Лодка, двигаясь $\frac{3}{4}$ ч против течения, затем 2 ч – по течению, прошла 19 км. Найдите собственную скорость весельной лодки и скорость течения.

1457. Из первого крана за 2 мин вытекает на 30 л воды меньше, чем из второго крана за 3 мин. Из первого крана за 5 мин вытекает на 380 л воды больше, чем из второго за 4 мин. Сколько литров воды вытекает из каждого крана за 1 мин?

1458. Даны два числа. $\frac{3}{7}$ первого числа на 6 меньше, чем $\frac{3}{4}$ второго. $\frac{1}{4}$ первого числа на 4 больше, чем $\frac{1}{8}$ второго. Найдите первое число, второе число.

A. 29; 25; **B.** 23; 18; **C.** 28; 24; **D.** 32; 18.

1459. Вычислите:

$$3\frac{1}{8}\cdot\left(2,4\cdot\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{7,15+14:2,8\cdot0,17}{4\cdot0,375+2,5}\right)+6,84:1,9\right).$$

1425. 1) (7; 5); 2) (–1; 3); 3) (3; –5); 4) (2; 3); 5) (8; –2); 6) (2; 6). **1426.** 1) (2; –1); 2) (–10; –17); 3) (–4; 6). **1427.** 1) (2; –4); 2) (–1; 6); 3) (2; 1); 4) (4; –3). **1428.** 33 и 25. **1429.** 9000 тг, 7000 тг. **1430.** 150 тг; 125 тг. **1432.** 22 и 14. **1433.** 7 см/с; 3 см/с. **1436.** 250 г; 150 г. **1439.** 1) (4; 2); 2) (15; –14); 3) (5; 3); 4) (2; 6). **1440.** 1) (8; –2); 2) (–2; –1); 3) (3; 5); 4) (1; 3). **1443.** 12 га; 9 га. **1445.** 28 учеников; 68 листов. **1447.** 15 км/ч; 12 км/ч. **1450.** 1) (7; 1); 2) (2; 1). **1451.** 1) (5; 2); 2) (2; 3); 3) (4; 3); 4) (6; 5). **1452.** 320 т; 240 т. **1453.** 24 км/ч; 20 км/ч. **1454.** 80 деталей; 60 деталей. **1455.** 80 км/ч; 70 км/ч. **1456.** 6 км/ч; 2 км/ч. **1457.** 180 л; 130 л. **1459.** 5.

Обратите внимание на способ решения системы уравнений.

Задача. Сумма двух чисел равна 21, а их разность равна 9. Найдите эти числа.
Пусть x – первое число, y – второе число.

1) Составим систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 21, \\ x - y = 9. \end{cases}$

2) Сложив почленно левую и правую части уравнений, получим уравнение с одной переменной $2x = 30$, откуда $x = 15$.

3) Подставив полученное значение переменной x в любое из уравнений системы, найдем значение переменной y.

$15 + y = 21;$
$y = 21 - 15;$
$y = 6.$

Проверка: $\begin{cases} 15 + 6 = 21, \\ 15 - 6 = 9, \end{cases}$ $\begin{cases} 21 = 21, \\ 9 = 9. \end{cases}$

О т в е т: $x = 15$; $y = 6$.

Решите этим же способом систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = 9, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$

10.5. Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом сложения

Рассмотрим решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом сложения.

При решении системы уравнений таким способом в зависимости от коэффициентов при переменных, входящих в систему уравнений, часто встречаются подобные случаи.

***Случай I*. В уравнениях, входящих в систему, коэффициенты при одной из переменных – противоположные числа.**

Пример 1. Решим систему уравнений способом сложения:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 6 = 0, \\ 6x + 2y - 30 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Сложив почленно левую и правую части уравнений, получим уравнение с одной переменной:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 6x + 2y = 30. \end{cases}$$

$$9x = 36.$$

Составим новую систему, состоящую из уравнения $9x = 36$ и одного из уравнений первоначальной системы (1):

$$\begin{cases} 9x = 36, \\ 6x + 2y = 30. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) равносильна системе (1).

Из первого уравнения системы находим $x = 4$. Подставив значение x во второе уравнение $6x + 2y = 30$, найдем соответствующее значение y.

$6 \cdot 4 + 2y = 30,$
$24 + 2y = 30,$
$y = 3.$

Система имеет единственное решение: $x = 4$, $y = 3$.

Краткая запись решения системы:

$$+\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 6x + 2y = 30. \end{cases}$$
$$\overline{\quad 9x = 36. \quad}$$
$$x = 4.$$

$6 \cdot 4 + 2y = 30,$
$2y = 6,$
$y = 3.$ Ответ: (4; 3).

***Случай II*. Коэффициенты при одной переменной в обоих уравнениях системы равны.**

Пример 2. Решим систему уравнений: $\begin{cases} 2x + 5y - 16 = 0, \\ 2x + 7y - 20 = 0. \end{cases}$

Чтобы решить эту систему уравнений способом сложения, надо обе части одного из уравнений системы умножить на (−1) и сложить почленно или из одного уравнения системы почленно вычесть другое.

$$\begin{cases} 2x + 5y = \ \ 16, \\ -2x - 7y = -20 \end{cases} \quad \text{или} \quad -\begin{cases} 2x + 5y = 16, \\ 2x + 7y = 20 \end{cases}$$
$$-2y = -4, \qquad\qquad -2y = -4,$$
$$y = 2. \qquad\qquad\qquad y = 2.$$

Подставим найденное значение y в любое из уравнений системы. Например,

$2x + 5 \cdot 2 = 16,$
$2x = 16 - 10,$
$2x = 6,$
$x = 3.$

Ответ: $x = 3$; $y = 2$.

***Случай III*. Коэффициенты при переменных в обоих уравнениях не равны между собой и не являются противоположными числами.**

Пример 3. Решим систему уравнений: $\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 7x - 5y = 25. \end{cases}$

В этом случае надо первое и второе уравнения системы умножить на такие числа, чтобы коэффициенты при одной из переменных в обоих уравнениях оказались противоположными числами. Затем заменить данную систему на равносильную. Первое уравнение умножим на 7, а второе – на (–2):

$$\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 7x-5y=25 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 7 \\ \cdot(-2) \end{matrix} \right., \quad \text{тогда} \begin{cases} \;\;14x-21y=28, \\ -14x+10y=-50; \end{cases}$$

$$-11y=-22,$$

$$y=2.$$

Подставив найденное значение y в уравнение $2x - 3y = 4$, получим:

$2x - 3 \cdot 2 = 4,$
$2x = 4 + 6,$
$2x = 10,$
$x = 5.$

Проверка: $\begin{cases} 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 4, \\ 7 \cdot 5 - 5 \cdot 2 = 25. \end{cases}$

Ответ: $x = 5$; $y = 2$.

Чтобы решить систему линейных уравнений с двумя переменными способом сложения, надо:

1) умножить левую и правую части одного или обоих уравнений на некоторое число так, чтобы коэффициенты при одной из переменных в уравнениях стали противоположными числами;

2) сложить почленно полученные уравнения и найти значение одной из переменной;

3) подставить найденное значение одной переменной в одно из данных уравнений и найти значение второй переменной.

Если в данной системе коэффициенты при одной переменной – противоположные числа, тогда решение системы надо начать с почленного сложения уравнений.

1. Как решить систему уравнений способом сложения, если только у одной переменной коэффициенты в обоих уравнениях – противоположные числа?
2. Как решить систему уравнений способом сложения, если только у одной переменной коэффициенты в обоих уравнениях равны?
3. Как решить систему уравнений способом сложения, если коэффициенты у одной переменной в обоих уравнениях различны?

1460. 1) $\begin{cases} x+y=12, \\ x-y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=19, \\ -x+y=1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=10, \\ x-y=2. \end{cases}$

Для какой системы уравнений будут решениями пары значений (устно): а) $x = 9$; $y = 10$; б) $x = 7$; $y = 5$; в) $x = 4$; $y = 2$?

А

1461. Решите системы уравнений способом сложения:

1) $\begin{cases} 5x + y = 20, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 3y = 2, \\ -2x + 5y = -18; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 3y = 9, \\ 4x + 3y = 27; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 4y = 39, \\ 2x - y = 15. \end{cases}$

1462. Найдите решение систем уравнений способом сложения:

1) $\begin{cases} 7x + 2y = 9, \\ 5x + 2y = 11; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 7y = 19, \\ x + 5y = 13; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9x - 2y = -17, \\ x - 2y = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x - 2y = 15, \\ 2x - y = 7. \end{cases}$

1463. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} 3x + 5y = 16, \\ 2x + 3y = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x - 5y = 23, \\ 2x + 3y = 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9x - 7y = 95, \\ 4x + y = 34; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x + 5y = 0, \\ 2x + 3y = -8. \end{cases}$

1464. Сколько решений имеет система:

1) $\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ 6x - 15y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 7y = 19, \\ 2x + y = 12; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x - 3y = -3, \\ -5x + 3y = 8\,? \end{cases}$

Составьте систему уравнений и решите ее способом сложения **(1465–1472).**

1465. Среднее арифметическое двух чисел равно 19, а их разность равна 4. Найдите эти числа.

1466. Катер проплыл по течению 50 км за 2 ч, а против течения – на 10 км больше за 3 ч. Найдите собственную скорость катера и скорость течения.

1467°. На дворе находятся козлята и куры. У всех вместе 17 голов и 46 ног. Сколько козлят и сколько кур?

1468. В сумме двух чисел имеются 3 сотни, 5 десятков и 4 единицы. В разности этих чисел – 3 десятка и 6 единиц. Найдите первое число; второе число.

1469. В прямоугольнике ширина на 6 см меньше длины, а длина в 1,4 раза больше ширины. Какова длина прямоугольника?

1470. У двух мальчиков 15 яблок. Если первый мальчик даст второму 4 яблока, то у него яблок будет в 2 раза меньше, чем у второго. Сколько яблок у каждого мальчика?

1471. Если два мальчика побегут навстречу друг другу по окружности длиной 120 м, то они встретятся через 15 с. Если мальчики будут бежать друг за другом по тому же кругу, то они будут встречаться через каждую минуту. Найдите скорость каждого мальчика.

1472. Моторная лодка проплыла по течению 105 км за 3 ч, а против течения – 116 км за 4 ч. Найдите скорость течения и собственную скорость моторной лодки.

1473. Решите уравнения:

1) $7,2x + 4\frac{2}{5}x = 110,2 : 3,8;$

2) $3\frac{3}{4}x \cdot \left(\frac{1}{3} + 0,4\right) = 1,1;$

3) $3,4 \cdot (0,4x + 0,2) + 1,52 = 8,32;$

4) $44,62 : (7,8 + 0,5x) + 26,51 = 31,11.$

B

1474. Решите системы уравнений способом сложения:

1) $\begin{cases} 2x + 7y - 44 = 0, \\ 2x - 3y = -36; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 8y - 17 = 0, \\ 3x + 4y - 23 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 15x + 11y - 47 = 0, \\ 5x - y + 17 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 8x - 9y - 21 = 0, \\ 3x - 2y - 12 = 0. \end{cases}$

1475. Найдите решение систем уравнений способом сложения:

1) $\begin{cases} 0,2x + 15y = 9,8, \\ 0,75x - 10y = -3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0,3x - 0,5y = 0, \\ 0,1x + 2y = 6,5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 15x - 11y = 25, \\ 5x - 4y = 10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 0,7x + 6y = 27,9, \\ 1,5x - 2y = -14,5. \end{cases}$

Решите системы уравнений способом сложения **(1476, 1477)**.

1476. 1) $\begin{cases} 2(x+3y)+9=x+6, \\ 3(x-2y)=x+30; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4(3x+y)-1=y-2x, \\ 2(4x-y)+19=-x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5(3x+2)=7+12y, \\ 4(x+y)+x=31; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2(x+2y)-7y=6, \\ 5(2x+y)-x=2y+60. \end{cases}$

1477. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=6, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=2,5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}=6, \\ \dfrac{x}{8}-\dfrac{y}{2}=-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=4, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{5}=8, \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{7}=-2. \end{cases}$

Составьте систему уравнений и решите ее способом сложения **(1478–1486).**

1478. У Елдоса и Антона всего 36 марок. Если Елдос отдаст Антону 40% из своих марок, то их у него окажется в 2 раза меньше, чем у Антона. Сколько марок у каждого мальчика?

1479. Задуманы два числа. Если из первого числа вычесть удвоенное второе, то получится 4. Если к первому числу прибавить утроенное второе, то получится 39. Какие числа были задуманы?

1480. Масса 2 коробок конфет и масса 4 пачек орехов равна 1,7 кг. Масса 5 коробок конфет и масса 3 пачек орехов равна 2,15 кг.

- Найдите массу коробки конфет.
- Найдите массу пачки орехов.

1481. Группа из 31 туриста переплыла на 7 лодках на противоположный берег озера. Лодки были пятиместные и трехместные. Сколько лодок было пятиместных? трехместных?

1482. Масса $\dfrac{1}{2}$ м^3 стали и 0,3 м^3 чугуна составляет 6 т. Масса 0,3 м^3 стали и $\dfrac{1}{2}$ м^3 чугуна составляет 5,84 т. На сколько тонн 1 м^3 стали тяжелее 1 м^3 чугуна?

1483. За 3 ч автобус преодолевает такое же расстояние, какое проедет поезд за 2 ч. Туристы ехали 4 ч на автобусе и 3 ч на поезде, а всего они проехали 408 км. Найдите скорость автобуса и скорость поезда.

1484. В прошлом году было засеяно 50 га поля пшеницей и 30 га рожью и всего собрано 990 ц урожая. В этом году засеяно 20 га пшеницей и 40 га рожью и всего собрано 760 ц урожая. Урожайность за эти два года была одинаковой. Сколько центнеров пшеницы и сколько центнеров ржи собрано с 1 га поля?

1485. *(Задача-шутка.)* $\frac{1}{3}$ девочек и $\frac{1}{4}$ мальчиков, участвовавших в хоре, пели громко, а остальные делали вид, что поют. Мальчиков и девочек, которые пели громко, было всего 8, причем девочек было на 2 больше, чем мальчиков. Сколько всего девочек и мальчиков участвовало в хоре?

1486. Даны два числа. 50% разности этих чисел равно 9,5, а 25% первого числа на 44 меньше, чем второе число. Найдите эти числа.

A. 75; 56; **B.** 84; 65; **C.** 72; 53; **D.** 80; 61.

1487. Найдите значение выражений:

1) $8x+8y-3\frac{2}{5}$, если $x+y=1,25$;

2) $\left(0,4x-\frac{2}{5}y\right)\cdot 9,8$, если $x-y=3,5$;

3) $12\frac{4}{5}x\cdot 1,25y$, если $x\cdot y=\frac{5}{8}$;

4) $\left(\frac{3}{5}x+0,6y\right)\cdot 2,25$, если $x+y=2\frac{2}{9}$.

C

1488. Решите системы уравнений способом сложения:

1) $\begin{cases} \frac{x+7}{3}-\frac{y-8}{5}=3, \\ \frac{x+5}{4}+\frac{y+9}{3}=5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x+9}{3}-\frac{y+8}{6}=3, \\ \frac{x+11}{7}+\frac{y+6}{2}=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x+7}{4}+\dfrac{y-5}{2}=-1, \\ \dfrac{x+10}{3}-\dfrac{y+8}{5}=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x-9}{3}-\dfrac{y+10}{2}=0, \\ \dfrac{x-7}{4}+\dfrac{y+10}{8}=-1,5. \end{cases}$

Найдите решение систем уравнений **(1489, 1490)**.

1489. 1) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8}+\dfrac{y}{2}=4, \\ \dfrac{x}{10}-\dfrac{x-y}{5}=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2}-\dfrac{x+y}{4}=-3, \\ \dfrac{y}{2}-\dfrac{x+y}{5}=0. \end{cases}$

1490. 1) $\begin{cases} \dfrac{x+4y}{9}-\dfrac{x-2y}{3}=0, \\ \dfrac{x+7y}{4}+\dfrac{x+y}{6}=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{10}-\dfrac{x+4y}{3}=-8, \\ \dfrac{2x-3y}{2}-\dfrac{x+y}{6}=0. \end{cases}$

1491. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=\dfrac{3x+2y}{4}+3, \\ 3(x-y)-6=\dfrac{x+5y}{7}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y=\dfrac{3x+y}{8}+10, \\ x+4y=\dfrac{x+5y}{2}+16. \end{cases}$

Составьте систему уравнений и решите ее способом сложения **(1492–1498).**

1492. Расстояние между населенными пунктами равно 200 км. Если из этих пунктов одновременно навстречу друг другу выедут автомобиль и мотоцикл, то они встретятся через 2 ч. Если из этих пунктов одновременно в одном направлении выедут автомобиль и мотоцикл, то автомобиль догонит мотоцикл через 5 ч. Найдите скорость автомобиля и скорость мотоцикла.

1493. Среднее арифметическое двух чисел равно 175. Если первое число разделить на второе, то частное будет равно 3, а остаток 30. Найдите эти числа.

A. 260; 90; **B.** 270; 80; **C.** 180; 170; **D.** 200; 150.

1494. На двух книжных полках 92 книги. Если $\frac{1}{3}$ количества книг со второй полки переложить на первую полку, тогда на первой полке станет на 20 книг больше, чем на второй. Сколько книг было на первой полке? на второй полке?

1495. Из пункта A в пункт B турист выехал на мотоцикле со скоростью 35 км/ч. Обратно он вернулся на велосипеде со скоростью 14 км/ч. На весь путь он затратил 2,8 ч. Найдите время движения туриста из пункта A в пункт B и из пункта B в пункт A.

1496. Теплоход плыл 2 ч по течению и 3 ч против течения и проплыл 132 км. Затем он плыл 3 ч по течению и 4 ч против течения. Расстояние, пройденное им за 3 ч по течению, на 6 км меньше, чем расстояние, пройденное им за 4 ч против течения. Найдите скорость теплохода по течению и против течения.

1497. Сумма 80% первого числа и 50% второго числа равна 22. $\frac{2}{3}$ первого числа на 5 больше, чем $\frac{1}{4}$ второго числа. Найдите первое число; второе число.

1498. Даны два прямоугольника. Ширина первого прямоугольника 7 см, а ширина второго 13 см. Сумма их площадей равна 146 см^2. Ширину первого прямоугольника увеличили в 3 раза, а ширину второго уменьшили на 5 см. Сумма площадей двух прямоугольников стала на 44 см^2 больше, чем первоначальная их сумма. Найдите длину каждого прямоугольника.

1482. Выполните действия:

$$\frac{4\frac{2}{5}\cdot 1,5+31,5:4\frac{1}{2}}{\frac{12}{25}-0,28}:\frac{17,1+3\frac{1}{6}-1\frac{2}{3}}{0,5\cdot\left(2\frac{3}{20}+7,15\right)}.$$

1461. 1) (3; 5); 2) (6; 1); 3) (4; −2); 4) (11; 7). **1462.** 1) (−1; 8); 2) (−3; −5); 3) (−2; 3); 4) (1; −5). **1463.** 1) (−3; 5); 2) (9; −2); 3) (6; −1); 4) (5; −6). **1465.** Числа 21 и 17. **1466.** 22,5 км/ч; 2,5 км/ч. **1467.** 6 козлят; 11 кур. **1471.** 5 м/с; 3 м/с. **1472.** 3 км/ч; 32 км/ч. **1473.** 1) 2,5; 2) 0,4; 3) 4,5; 4) 3,8. **1474.** 1) (−6; 8); 2) (9; −1); 3) (−2; 7); 4) (6; 3). **1475.** 1) (4; 0,6); 2) (5; 3); 3) (−2; −5); 4) (−3; 5). **1476.** 1) (9; −2); 2) (3; 4); 3) (−1; 5); 4) (6; 2).

14–3451

1477. 1) (9; 6); 2) (24; 8); 3) (6; 8); 4) (12; 35). **1479.** Числа 18 и 7. **1481.** 5 пятиместных лодок, 2 трехместных лодки. **1482.** На 0,8 т. **1483.** 48 км/ч; 72 км/ч. **1484.** 12 ц пшеницы; 13 ц ржи. **1485.** 15 девочек; 12 мальчиков. **1488.** (–1; 3); 2) (3; –2); 3) (5; –3); 4) (–3; –2). **1489.** 1) (2; 6); 2) (12; 8). **1490.** 1) (5; 1); 2) (10; 5). **1491.** 1) (6; 3); 2) (11; 7). **1495.** 0,8 ч; 2 ч. **1496.** 30 км/ч; 24 км/ч. **1497.** Числа 15 и 20. **1498.** 6 см; 8 см. **1499.** 17.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ ПО МАТЕРИАЛАМ 5 КЛАССА

1500. 1) Запишите делители чисел: 6, 12, 36, 45.
2) Запишите наибольший общий делитель чисел:

15 и 40; 36 и 60; 75 и 100.

1501. Найдите наименьшее общее кратное чисел:

3 и 7; 12 и 15; 30 и 18.

1502. Найдите среди чисел 17, 25, 41, 71, 80, 109, 150, 151 простые и составные числа.
В одну строчку выпишите простые числа, а в другую – составные.

1503. Объем прямоугольного параллелепипеда равен: 1) 273 см^3; 2) 385 см^3. Найдите измерения параллелепипеда.

1504. Используя цифры 2, 3, 5, 7, причем каждую только один раз, запишите двузначные числа, которые делятся: 1) на 2; 2) на 3; 3) на 5.

1505. Какова должна быть наименьшая длина проволоки в мотке, чтобы ее можно было разделить по 6 метров? по 8 метров?

Обыкновенные и десятичные дроби и действия над ними

1506. 1) Запишите дроби $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{8}{15}$ со знаменателем 60.

2) Приведите дроби $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{15}$ к наименьшему общему знаменателю.

1507. Выпишите дроби, которые можно представить в виде десятичных и запишите их в виде десятичных дробей:

$$\frac{1}{4};\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{5};\ \frac{3}{7};\ \frac{1}{20};\ \frac{7}{30};\ \frac{4}{25};\ \frac{9}{50}.$$

1508. Запишите обыкновенную дробь в виде десятичной. Вычислите:

1) $4\frac{3}{5}\cdot 1,6+2,4$; 2) $5,8\cdot 3\frac{3}{4}-1\frac{1}{4}$; 3) $2\frac{4}{25}+1,8\cdot\frac{3}{10}$;

4) $3\frac{7}{20}-1,5\cdot\frac{1}{2}$; 5) $1\frac{7}{10}+2\frac{1}{4}\cdot 1,2$; 6) $9\frac{11}{20}-\frac{3}{5}\cdot 7$.

1509. В составе сплава содержится 27,3 г серебра, что составляет $\frac{7}{20}$ сплава, остальное – другие металлы. Найдите массу других металлов в составе сплава.

1510. Катер проплывает расстояние 84 км по течению реки за 4 часа, а против течения – за $5\frac{3}{5}$ часов. Найдите собственную скорость катера.

1511*. Ученик прочитал $\frac{1}{7}$ книги, а затем $\frac{2}{3}$ оставшейся части. После этого он заметил, что прочитал на 36 страниц больше, чем ему осталось прочитать. Сколько страниц в книге?

1512. Катер $3\frac{1}{2}$ часа шел по течению, затем $4\frac{1}{5}$ часа – против течения реки и прошел 159,67 км. Чему равна скорость течения реки? Найдите собственную скорость катера.

Проценты

1513. Автобус ехал 3 ч со скоростью 50 км/ч. Затем он ехал 2 ч, увеличив скорость на 20%. Сколько километров проехал автобус?

1514. Медь составляет 67% массы сплава, а остальная часть – цинк. Сколько граммов цинка содержится в 750 кг сплава?

1515. Как изменится площадь прямоугольника, если его длину уменьшить на 30%, а ширину увеличить на 30%? На сколько процентов увеличится или уменьшится площадь прямоугольника?

1516. Рабочий за день изготовил 360 деталей, что составляет 150% дневной нормы. Сколько деталей составляет дневная норма?

1517*. 600 г солевого раствора содержит 15% соли. Сколько граммов воды надо добавить в раствор, чтобы в нем содержалось 10% соли?

1518*. В 15 т чугуна содержится 80% железа. Если к чугуну добавить 5 т железа и сделать новый сплав, то сколько процентов железа будет в этом сплаве?

1519. Из 30 кг свежих яблок получается 4,8 кг сушеных. Сушеные яблоки содержат 10% воды. Сколько процентов воды содержат свежие яблоки?

▲ **1503.** 3 см; 7 см; 13 см. **1509.** 50,7 г. **1510.** 18 км/ч. **1511.** 84 страницы. **1512.** Скорость катера 21 км/ч. **1513.** 270 км. **1515.** На 9% уменьшится. **1517.** 300 г. **1518.** 85%. **1519.** 85,6% воды.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ ПО МАТЕРИАЛАМ 6 КЛАССА

Отношения и пропорции

1520. Найдите неизвестный член отношения:
1) $x : 12 = 8$; 3) $42 : x = 3$; 5) $95 : x = 5$;
2) $x : 0{,}9 = 4$; 4) $28 : x = 4$; 6) $7{,}2 : x = 1{,}8$.

1521. Сплав массой 360 г состоит из меди и цинка. Отношение массы меди к массе цинка равно 3 : 2. Найдите массу меди и массу цинка в сплаве.

1522. Из посаженных 300 семян лука взошли 195. Каков процент всхожести семян лука?

1523. Запишите отношение дробных чисел в виде отношения целых чисел:

1) $\frac{1}{6} : \frac{2}{5}$; 2) $\frac{2}{3} : \frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{4} : \frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{2} : \frac{5}{8}$; 5) $\frac{5}{12} : \frac{1}{5}$; 6) $\frac{3}{8} : \frac{1}{4}$.

1524. Запишите в виде пропорции:
1) $5 \cdot 84 = 12 \cdot 35$; 3) $7 \cdot 60 = 15 \cdot 28$; 5) $6 \cdot 65 = 13 \cdot 30$;
2) $4 \cdot 27 = 3 \cdot 36$; 4) $9 \cdot 55 = 45 \cdot 11$; 6) $4 \cdot 114 = 19 \cdot 24$.

1525. Найдите неизвестный член пропорции:

1) $\frac{6}{11} = \frac{x}{55}$; 3) $\frac{x}{15} = \frac{24}{90}$; 5) $\frac{x}{19{,}5} = \frac{2}{3}$;

2) $\frac{3}{8} = \frac{45}{x}$; 4) $\frac{8}{x} = \frac{104}{117}$; 6) $\frac{37{,}8}{x} = \frac{7}{15}$.

1526. Найдите x:

1) $\frac{3x}{32} = \frac{7{,}5}{20}$; 2) $\frac{8}{9} = \frac{0{,}2x}{0{,}45}$; 3) $\frac{10{,}5}{2x} = \frac{18{,}9}{9}$;

4) $\dfrac{18,2}{5,6}=\dfrac{19,5}{4x}$; 5) $\dfrac{8x}{0,5}=\dfrac{8,4}{0,15}$; 6) $\dfrac{6}{7}=\dfrac{3,5x}{24,5}$.

1527. Решите уравнения:

1) $\dfrac{4x+23}{5,4}=\dfrac{8,5}{1,7}$; 3) $\dfrac{5}{12}=\dfrac{3}{1,3x+2}$; 5) $\dfrac{15}{27}=\dfrac{9}{8x+4,2}$;

2) $\dfrac{5}{6}=\dfrac{3x+1,5}{9}$; 4) $\dfrac{1,4}{2x+1}=\dfrac{4,6}{23}$; 6) $\dfrac{5x-0,8}{16}=\dfrac{3,4}{17}$.

1528. На заводе 4 рабочих выполнили задание за 9 дней.
1) За сколько дней выполнят это задание трое рабочих?
2) Сколько рабочих нужно, чтобы это задание было выполнено за 6 дней?

1529. Звук распространяется за 5 с на расстояние 1,7 км.
1) На какое расстояние распространяется звук за 2 с?
2) Через сколько секунд слышен шум грома на расстоянии 2,72 км?

1530. Для оклейки стен комнаты необходимо 72 м обоев шириной 0,5 м.
1) Сколько метров обоев шириной 0,6 м необходимо для оклейки стен этой комнаты?
2) Какова ширина обоев, если для оклейки стен этой комнаты израсходовали 90 м обоев?

1531. На карте расстояние между городами A и B равно 2,6 см, а между городами B и C – 3,7 см. На местности расстояние между городами B и C равно 296 км.
1) Найдите масштаб карты.
2) Найдите расстояние на местности между городами A и B.

Рациональные числа и действия над ними

1532. Постройте координатную прямую, приняв за единичный отрезок 1 см:
1) Отметьте на координатной прямой точки $A(-5)$; $B(-3)$; $C(1)$ и $D(4)$.
2) Отметьте точки A_1, B_1, C_1 и D_1, координатами которых являются числа, противоположные координатам точек A, B, C и D.

1533. Найдите x, если:

1) $-x=-\dfrac{3}{4}$; 2) $-x=-2\dfrac{4}{5}:1\dfrac{3}{4}$; 3) $-x = 9,3 : 3$; 4) $-x=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{4}$.

1534. На координатной прямой даны числа −5,8 и 4,3.
Запишите:

1) натуральные числа;
2) целые числа, расположенные между данными числами.

1535. Запишите числа, изображенные на координатной прямой в положительном направлении на расстоянии 4 единиц от числа:
1) 2; 2) -3.

1536. Запишите целые числа, удовлетворяющие неравенству:
1) $-15 < x < 7$; 2) $-9,6 < y < 11$; 3) $-8 < x < 9$.

1537. Решите уравнения:

1) $|x| = 7$; 3) $|x+1| = 3$; 5) $|x-1| = 6$;

2) $|2x| = 8$; 4) $|x| = -5$; 6) $|x+2| = 9$.

1538. Найдите значения выражений:

1) $\left|-\frac{3}{5}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right|$; 3) $\left|-4\frac{2}{3}\right| \cdot \left|\frac{3}{7}\right|$; 5) $|8,1| : |-2,7|$;

2) $|-3,24| : |4|$; 4) $|9,7| - |-5,6|$; 6) $|-0,3| \cdot |-3,1|$

1539. Сравните числа:

1) $\left|-5\frac{3}{8}\right|$ и $-5\frac{3}{8}$; 3) $-\frac{1}{|-4|}$ и $\frac{1}{4}$;

2) $\left|-\frac{1}{6}\right|$ и 6; 4) $\frac{3}{\left|-\frac{1}{5}\right|}$ и $\frac{2}{\left|-\frac{1}{3}\right|}$.

1540. Вычислите:
1) $15 + (-9)$; 3) $-\frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{6}\right)$; 5) $-4,5 - (-3,8)$;

2) $-8,3 + (-1,7)$; 4) $-1,8 + (-2,9)$; 6) $-\frac{5}{12} - \left(-\frac{3}{4}\right)$.

1541. Температура воздуха была a°C. Какой стала температура воздуха, когда она изменилась на b°C, если:
1) $a = +15$; $b = -2$; 3) $a = -1$; $b = +2$;
2) $a = -3$; $b = -1$; 4) $a = -6$; $b = -3$?
Сложение чисел выполните с помощью координатной прямой.

1542. Вчера уровень воды в озере был a см, а сегодня стал b см. На сколько сантиметров изменился уровень воды, если:
1) $a = 225$; $b = 232$; 2) $a = 252$; $b = 235$?

1543. Найдите длину отрезка AB (в единичных отрезках) на координатной прямой, если:

1) $A(-3)$ и $B(2)$; 3) $A(-2)$ и $B(0)$;
2) $A(-5)$ и $B(-1)$; 4) $A(-4)$ и $B(-7)$.

1544. На координатной прямой точка $C(-3)$ является серединой отрезка AB. Найдите длину отрезка AB (в единичных отрезках), если:

1) $A(-8)$; 2) $A(-5)$; 3) $B(2)$; 4) $B(1)$.

1545. Вычислите:

1) $3{,}1 \cdot (-2)$; 3) $-5{,}6 \cdot (-0{,}7)$; 5) $(-2{,}4)^2 : 8 - 1$;
2) $31 : (-6{,}2)$; 4) $-25{,}9 : (-5)$; 6) $9{,}6 : (-1{,}6) + 4{,}9$.

1546. Решите уравнения:

1) $\dfrac{2x+5{,}2}{3} = \dfrac{4{,}1}{1{,}5}$; 3) $\dfrac{8}{12{,}8} = \dfrac{x-3}{3{,}2}$;

2) $\dfrac{1{,}8}{x+1} = \dfrac{0{,}9}{2{,}5}$; 4) $\dfrac{3x-2{,}2}{8} = \dfrac{3{,}4}{4}$.

1547. Цена компьютера снизилась на $\dfrac{1}{5}$ его стоимости. Во сколько раз прежняя цена больше новой?

A. В 1,3 раза. **B.** В 1,33 раза; **C.** В 1,25 раза; **D.** В 1,2 раза.

1548. Если число, задуманное Ириной, умножить на -6, затем прибавить к нему $8\dfrac{4}{5}$, то получится число $-67{,}4$. Какое число задумала Ирина?

Алгебраические выражения

1549. При каких значениях переменной выражение имеет смысл:

1) $\dfrac{3}{x}$; 2) $\dfrac{4}{x-2}$; 3) $\dfrac{a}{5+a}$; 4) $\dfrac{8a}{9-a}$?

1550. Запишите:
1) сумму чисел, обратных числам x и y;
2) отношение суммы чисел a и b к их разности;
3) число, противоположное сумме чисел x и y.

1551. Запишите без скобок и упростите выражения:
1) $5a + (-8b) + (-7c) + (-2a) + 3b + c$;
2) $3n + 6m + (-15k) + (-n) + (-5m) + 8k$;
3) $8{,}2a + (-4b) + 10{,}3c + (-4a) + (-9{,}5b) + (-8c)$.

1552. Упростите выражения:

1) $5{,}3x + 8 - 7{,}2y - 2{,}5x + 10y - 9{,}4$;

2) $\frac{2}{3}a + \frac{1}{7}b - \frac{3}{4}c + \frac{1}{2}a - 2b + 4c$;

3) $0{,}3x - 9y - 1{,}5 + 6{,}2x - 5{,}6y + 4$.

1553. Упростите выражения. Определите коэффициенты:

1) $6a \cdot (-2b) \cdot (-c)$;

2) $-\frac{5}{6}a \cdot \left(-\frac{4}{5}b\right) \cdot \frac{3}{8}$;

3) $-0{,}5a \cdot (-7b) \cdot (-2c)$;

4) $-4m \cdot 0{,}8c \cdot (-5d)$.

1554. Раскройте скобки, приведите подобные слагаемые. Найдите значения выражений:

1) $12(x + 3) - 5x - 21$, если $x = 0{,}5$;

2) $-3(8{,}2y - 7) + 4{,}6y$, если $y = 1{,}6$;

3) $0{,}9(4x + 3) - (1{,}6x - 0{,}3)$, если $x = -1$;

4) $7(x + 5) - 2(x - 3)$, если $x = -3$.

Составьте выражение по условию задачи **(1555, 1556)**.

1555. При разложении числа на разрядные единицы оно записывается в виде суммы 6 сотен, a десятков и 5 единиц. Какая цифра должна стоять вместо a, чтобы данное число было кратно числу 45?

1556*. Смешали два раствора соли. Масса первого раствора 400 г, в нем 25% соли; масса второго раствора 200 г, в нем 10% соли:

1) Сколько граммов соли в первом растворе?
2) Сколько граммов соли во втором растворе?
3) Сколько граммов соли в обоих растворах?
4) Какова масса смеси, приготовленной из двух растворов?
5) Сколько процентов соли в смеси?

Составьте выражение для решения задачи и найдите его значение **(1557, 1558)**.

1557. Площадь основания прямоугольного параллелепипеда равна S см^2, а высота h см. Найдите объем параллелепипеда, если $S = 56$; $h = 5$.

1558. С пристаней, расстояние между которыми 110 км, одновременно навстречу друг другу вышли две моторные лодки. Скорость первой лодки a км/ч, а скорость второй – b км/ч. Через сколько часов они встретятся, если $a = 20$; $b = 24$?

Линейные уравнения с одной переменной

1559. Найдите корни уравнений:

1) $2x - 5 = x + 1$; 3) $7(x + 6) = 4(5x + 4)$; 5) $\frac{1}{6}(x+9) = -\frac{1}{3}x$;

2) $3(x - 5) = x + 3$; 4) $1{,}5(x + 8) = -4x + 1$; 6) $\frac{3}{4}(x+8) = 2x+1$.

1560. Решите уравнения:

1) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{5}{12} + \frac{x}{6}$; 3) $\frac{x}{3} - \frac{x}{15} = \frac{x}{5} + \frac{2}{3}$;

2) $\frac{x}{5} + \frac{x}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$; 4) $\frac{x}{8} - \frac{x}{6} = \frac{x}{4} - \frac{7}{8}$.

1561. Длина отрезка AB равна 30 см. Точка C делит отрезок AB на отрезки AC и CB, причем 25% длины отрезка AC равно $\frac{1}{6}$ длины отрезка CB. Найдите длину отрезка AC.

1562. Катер прошел расстояние между пристанями туда и обратно за 4,5 ч. Скорость течения реки 2 км/ч. Собственная скорость катера 18 км/ч. Найдите расстояние между пристанями.

1563. У двузначного числа количество десятков в 3 раза больше, чем количество единиц. Если поменять местами цифры, то получится число, которое на 54 меньше первоначального. Найдите двузначное число.

1564. Сахар разложили в 75 пакетов. Половину сахара разложили в пакеты по 1 кг, а остальную часть – по 0,5 кг. Во сколько пакетов разложили сахар по 1 кг? Сколько всего килограммов сахара разложили в пакеты?

Решите уравнения **(1565–1567).**

1565. 1) $|y| + 2 = 6$; 3) $3|x| - 2 = 2|x| + 3$; 5) $4|x| - 7 = -2|x| + 5$;
2) $|y| + 3 = 8$; 4) $9 + 2|x| = 12 - |x|$; 6) $3|x| - 8 = |x| + 4$.

1566. 1) $|x + 7| = 0$; 3) $|x - 7| = 0$; 5) $|4x + 1| = 11$;
2) $|3x - 5| = 0$; 4) $|5 - 2x| = 0$; 6) $|2 - 5x| = 3$.

1567. 1) $2x|x| = 6x$; 2) $3x|x| = -15x$;
3) $x|x| = -3|x|$; 4) $3x|x| + x|x| = 8|x|$.

Линейные неравенства с одной переменной и их системы

1568. Сравните числа a и b по их разности:

1) $a - b = 9$; 3) $a - b = 0$; 5) $a - b = -1{,}2$;
2) $a - b = -5$; 4) $a - b = 0{,}8$; 6) $a - b = 15$.

1569. Сложите почленно неравенства:

1) $4 > -7$ и $9 > 5$; 3) $-11 < -3$ и $2 < 5$;
2) $-9 < 2$ и $3 < 6$; 4) $2 > -7$ и $3 > -1$.

1570. Перемножьте почленно неравенства:

1) $2 < 5$ и $4 < 8$; 3) $\frac{1}{2} > \frac{1}{7}$ и $22 > 14$;
2) $0{,}9 > 0{,}4$ и $5 > 3$; 4) $\frac{1}{9} < \frac{7}{10}$ и $9 < 10$.

Решите неравенства **(1571, 1572).**

1571. 1) $3x + 7 > 13$; 3) $16 - 4x < 0$; 5) $\frac{x-3}{2} > \frac{x+1}{4}$;
2) $5x - 15 > 0$; 4) $6(x + 1) > 5x + 3$; 6) $\frac{2x+1}{5} > \frac{x-4}{3}$.

1572. 1) $|x| \leqslant 4$; 3) $|x - 1| \geqslant 15$; 5) $|1 - x| > 0{,}9$;
2) $|x + 1| \leqslant 10$; 4) $|x + 2| \leqslant 11$; 6) $|3 - x| \geqslant 0{,}7$.

1573. Оцените значение выражения $\frac{1}{a}$, если:

1) $4 < a < 7$; 2) $9 < a < 13$; 3) $\frac{1}{7} < a < \frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{10} < a < \frac{1}{8}$.

1574. Изобразите на координатной прямой и запишите с обозначением:

1) пересечение промежутков:
а) $[-2; 4]$ и $[1; 6]$; б) $(-\infty; 1)$ и $(-7; +9)$; в) $(-9; 9)$ и $(-3; 11)$;
2) объединение промежутков:
а) $[-2; 3]$ и $[1; 6]$; б) $(-\infty; -4)$ и $(5; +\infty)$; в) $[-4; 3]$ и $[2; 9]$.

Координатная плоскость

1575. Прямые AB, EF и CD пересекаются в точке O, причем $AB \perp CD$, $\angle EOC = 45°$. Найдите градусные меры углов AOE и DOF (рис. 1).

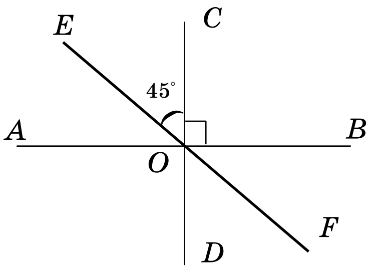


Рис. 1

1576. Изобразите шестиугольник $ABCDEF$, в котором три пары параллельных сторон.

1577. На координатной плоскости отметьте точки $A(2;\ 4)$ и $B(6;\ 2)$. Проведите прямую AB и отметьте точку $C(2;\ 2)$. Через точку $C(2;\ 2)$ проведите прямую EF, параллельную прямой AB. Найдите точку пересечения прямой EF с осью абсцисс.

1578. В прямоугольнике $ABCD$ известны координаты вершин $A(-2;\ 5)$ и $B(4;\ 5)$ и центр симметрии $E(1;\ 2)$. Найдите координаты вершин C и D. Постройте прямоугольник $ABCD$.

Статистика. Комбинаторика

1579. Автомобиль в первый час ехал со скоростью 62 км/ч, во второй час – 75 км/час, а в третий час – 58 км/ч. С какой средней скоростью ехал автомобиль?

1580. На координатном луче даны точки $A(4)$ и $B(10)$. Чему равно среднее арифметическое координат точек A и B? Найдите на координатном луче точку, соответствующую этому числу.

1581. Заполните таблицу:

Первое число	Второе число	Третье число	Арифметическое среднее
7,8	2,63	4,1	
9,25	5,2		7,65
	20,3	18,07	19,1

1582. Скорость теплохода по течению 30,1 км/ч, а против течения 24,5 км/ч. Найдите собственную скорость теплохода.

1583. В течение учебной четверти Юра по математике получил оценки: 4, 5, 4, 4, 3, 4.
Какова мода оценок Юры по математике?
Каков размах оценок Юры по математике?

1584. Найдите значение x:

$$\frac{8,7+9,3+5,2+x}{4}=7,4.$$

1585. Фигурист после исполнения программы получил очки: 5,6; 5,6; 5,5; 5,4; 5,3; 5,2; 5,2. Найдите медиану очков фигуриста.

1586. На весенних каникулах ученики планируют пойти в цирк, в театр и выехать на природу. Сколько различных вариантов отдыха можно составить?

1587. У Гульназ есть белая, зеленая, желтая и красная кофты и серая, черная, синяя юбки. Сколькими способами Гульназ может комбинировать одежду?

Линейные уравнения с двумя переменными и их системы

1588. Постройте графики уравнений:

1) $y = -3x + 2$; 3) $y = 1,5x + 4$; 5) $y = 2x$;

2) $y = \frac{3}{4}x$; 4) $y = -x - 5$; 6) $y = 2x + 3$.

1589. Точка D принадлежит графику уравнения $4x + 3y = 12$.
Начертите график данного уравнения;
По графику найдите:
1) абсциссу точки D, если ее ордината равна 8;
2) ординату точки D, если ее абсцисса равна 6.

1590. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=7, \\ 3x+2y=16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+y=-2, \\ 7x+4y=5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-7y=20, \\ 4x+y=10. \end{cases}$

1526. 1) 4; 2) 2; 3) 2,5; 4) 1,5; 5) 3,5; 6) 6. **1527.** 1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 3; 5) 1,5; 6) 0,8. **1529.** 2) Через 8 с. **1530.** 1) 60 м; 2) 0,4 м. **1531.** 1) 208 км; 2) 1 : 8 000 000. **1540.** 5) −0,7; 6) $\frac{1}{3}$. **1545.** 5) −0,28; 6) −1,1. **1546.** 1) 1,5; 2) 4; 3) 5; 4) 3.**1554.** 1) 18,5; 2) −11; 3) 1; 4) 26. **1556.** 5) 20%. **1560.** 1) 1; 2) 5; 3) 10; 4) 3. **1561.** 12 см. **1562.** 40 км. **1564.** В 25 пакетов; 50 кг. **1566.** 4) 2,5; 5) −3; 2,5; 6) −0,2; 1. **1567.** 1) −3; 3. **1571.** 4) $x > -3$; 5) $x > 7$; 6) $x > -23$. **1572.** 2) $-11 \leqslant x \leqslant 9$; 4) $-13 \leqslant x \leqslant 9$. **1577.** (6; 0). **1578.** $C(4; -1)$; $D(-2; -1)$. **1590.** 1) 2; 5; 2) −1; 3; 3) 3; −2.

ГЛОССАРИЙ

В

Вектор – 124
Векторная величина – 124
Вертикальные углы – 79

К

Координатные оси – 95
Координаты точки – 95
Координатная плоскость – 95
Комбинаторика – 129
Конус – 119

Л

Линейное неравенство с одной переменной – 53
Линейное уравнение с одной переменной – 53
Линейное уравнение с двумя переменными – 181

М

Медина ряда данных чисел – 136
Мода ряда данных чисел – 137

О

Объединение числовых промежутков – 47
Ось абсцисс – 95
Ось ординат – 95
Осевая симметрия – 101

П

Параллельные прямые – 82
Перебор возможных вариантов – 143
Переменная величина – 150
Пересекающиеся прямые – 78
Пересечение числовых промежутков – 48
Перпендикулярные прямые – 82
Пирамида – 119
Плоскость – 78
Прямая пропорциональность – 172
Прямоугольная система координат – 94
Пространственные фигуры – 117

Р

Равносильные уравнения – 9
Равносильные неравенства – 54
Размах ряда данных чисел – 135

С

Симметрия – 101
Система линейных неравенств с одной переменной – 62
Система линейных уравнений с двумя переменными – 196
Скалярная величина – 124
Среднее арифметическое нескольких чисел – 129
Средняя скорость движения – 130

У

Урожайность – 132

Ц

Центр симметрии – 109
Центральная симметрия – 110
Цилиндр – 118

Ч

Числовые неравенства – 28
Числовое равенство – 4
Числовые промежутки – 41

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Алдамуратова Турсынкуль Алдамуратовна
Байшоланова Карлыгаш Советовна
Байшоланов Еркин Советович

МАТЕМАТИКА

Часть 2

Учебник для 6 класса общеобразовательной школы

Зав. редакцией *Н. Жиенгалиев*
Художественный редактор *Н. Тлеумбеков*
Технический редактор *У. Рысалиева*
Корректор *И. Кротов*

ИБ № 052

Сдано в набор 20.01.2018. Подписано в печать 19.05.2018.
Формат $70 \times 90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл.-печ. 16,38. Уч.-изд.л. 11,3. Тираж 30 000 экз. Заказ № 3451.

ТОО «Корпорация «Атамұра», 050000, г. Алматы, пр. Абылай хана, 75.

Полиграфкомбинат ТОО «Корпорация «Атамұра» Республики
Казахстан, 050002, г. Алматы, ул. М. Макатаева, 41.